

Università degli Studi di Trento - Facoltà di Scienze Cognitive
 CdL in Scienze e Tecniche di Psicologia Cognitiva -
 CdL in Interfacce e Tecnologie della Comunicazione - CdL in Filosofia
 CORSO DI ANALISI MATEMATICA (CON ELEMENTI DI ALGEBRA)
 a.a. 2010-2011 - Rovereto, 22-26 novembre 2010

1) a) $\lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - 3) = 4 - 3 = \underline{\underline{1}};$

$\lim_{x \rightarrow 4^+} (2\sqrt{x} + \log_{1/4} x) = 2\sqrt{4} + \log_{1/4} 4 = 4 - 1 = \underline{\underline{3}};$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{x} = \frac{1 - 1}{1} = \underline{\underline{0}};$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x^3 - 1} = \underline{\underline{-\infty}};$
 infinitesimo negativo per $x \rightarrow 1^-$

□

b) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x^3 - 1} = \underline{\underline{+\infty}};$
 infinitesimo positivo per $x \rightarrow 1^+$

$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{x^4 - 1} = \underline{\underline{+\infty}};$
 infinitesimo positivo per $x \rightarrow -1^-$

$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{x^4 - 1} = \underline{\underline{-\infty}};$
 infinitesimo negativo per $x \rightarrow -1^+$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x + x^2}{x} \rightarrow \frac{1 + 0}{0} = \underline{\underline{+\infty}};$
 infinitesimo positivo per $x \rightarrow 0^+$

□

c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - 3^{x+1}}{x} = \underline{\underline{-\infty}};$
 infinitesimo positivo per $x \rightarrow 0^+$

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^4} = \underline{\underline{+\infty}};$
 infinitesimo positivo per $x \rightarrow 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 1}{2 - 4x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2(3 - 1/x^2)}{x^2(2/x^2 - 4)} = \underline{\underline{-\frac{3}{4}}};$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - x^3}{2x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3(1/x^3 - 1)}{2x^3} = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}};$

□

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{-3} + 3}{2^{-x} + 2} = \underline{\underline{\frac{3}{2}}};$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{1 - (3^x)} = \underline{\underline{0}};$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - x^4}{2x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 \left(\frac{1}{x^4} - 1 \right)}{2x^3} = \underline{\underline{+\infty}};$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + 4x^2}{3x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \left(\frac{1}{x^2} + 4 \right)}{3x^3} = \underline{\underline{0}}.$$

2) i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{(x+1)^2} = \underline{\underline{0}};$

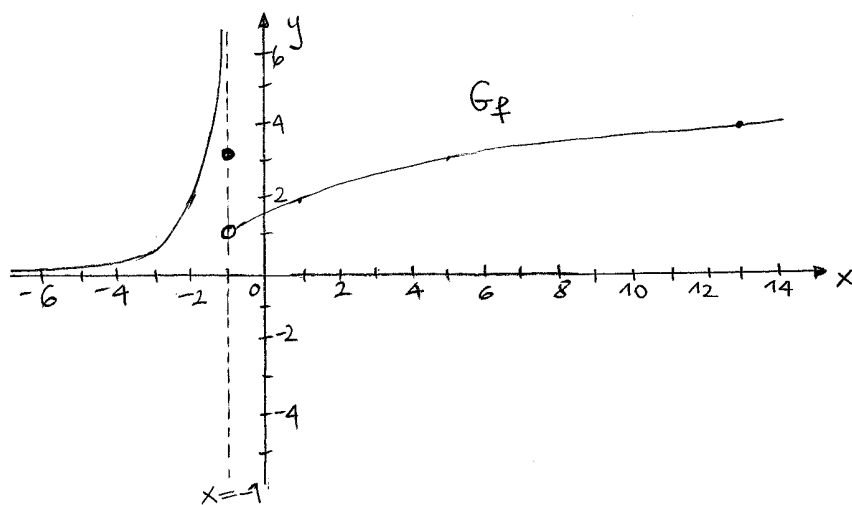
$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2}{(x+1)^2} = \underline{\underline{+\infty}};$$

infinitesimo positivo per $x \rightarrow -1^-$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left[-\log_{\frac{1}{2}}(x+3) \right] = -\log_{\frac{1}{2}} 2 = \underline{\underline{1}};$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\log_{\frac{1}{2}}(x+3) \right] = \underline{\underline{+\infty}}.$$

ii)



iii) f è continua su $]-\infty, -1[$, è continua su $]-1, +\infty[$;

f non è continua in $x = -1$: infatti

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty \quad f(-1) = 3 \neq \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 1. \quad \square$$

iv) $y = 0$ asintoto orizzontale per f , per $x \rightarrow -\infty$

$x = -1$ asintoto verticale per f ($\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$). $\square$

3) i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 2^{|x|}}{|x|} = \underline{\underline{-\infty}}$; infatti $2^{|x|} \gg |x|$ per $x \rightarrow -\infty$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5^x + x^2}{x^2 + e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5^x (1 + \frac{x^2}{5^x})}{e^x (\frac{x^2}{e^x} + 1)} = \underline{\underline{+\infty}}$;

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{2x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^{2x} - 1}{2x} \right) \cdot 2 = \underline{\underline{2}}$; $\frac{5^x}{e^x} = \left(\frac{5}{e}\right)^x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{2x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{e^{2x} - 1}{2x} \right) \cdot 2 = \underline{\underline{2}}$;

ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x - |x|}{\log_3 x + 3 \cdot 2^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x (1 - \frac{|x|}{2^x})}{2^x (\frac{\log_3 x}{2^x} + 3)} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$;

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(1 + x^7)}{x^2} = \underline{\underline{0}}$;

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + x^2)}{2x^2} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$;

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5}{5^x + x^5} = \underline{\underline{0}}$; ($5^x \gg x^5$ per $x \rightarrow +\infty$)

4) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x-3)^2} - 1 & \text{se } x \leq 2 \\ \frac{4x^2 + 1}{x-2} & \text{se } x > 2 \end{cases}$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1 \Rightarrow \underline{\underline{y = -1 \text{ è asintoto orizzontale per } f, \text{ per } x \rightarrow -\infty.}}$

$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 0$

$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{4x^2 + 1}{x-2} = +\infty$ (infinito positivo per $x \rightarrow 2^+$)

$\Rightarrow \underline{\underline{x = 2 \text{ è asintoto verticale per } f}}$

Oss. che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 + 1}{x-2} = +\infty$, quindi f non ha asintoto orizzontale per $x \rightarrow +\infty$. Possiamo però affermare

che f ha un asintoto obliquo: abbiamo

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2+1}{x^2-2x} = \underline{\underline{4}};$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{4x^2+1}{x^2-2x} - 4x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2+1-4x^2+8x}{x^2-2x} = \underline{\underline{8}}$$

Ne segue che $y=4x+8$ è asintoto obliquo per f , per $x \rightarrow +\infty$.

5) a) $f(x) = \sqrt{x}$ $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ per ogni $x > 0$.

L'eq. della retta tg. al grafico di f nel pt. $(4,2)$ è

$$y = 2 + \frac{1}{2\sqrt{4}}(x-4) \Rightarrow \underline{\underline{y = \frac{x}{4} + 1}}. \quad \square$$

b) $g(x) = \frac{1}{x}$ $g'(x) = -\frac{1}{x^2}$ per $x \neq 0$.

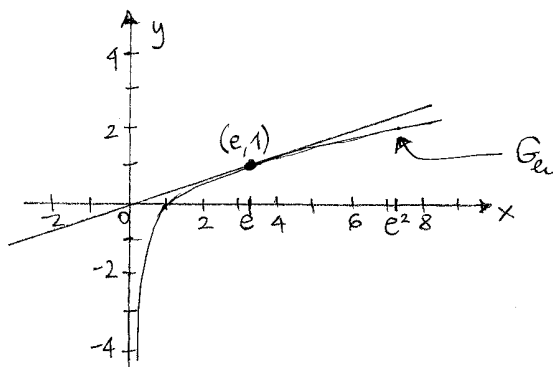
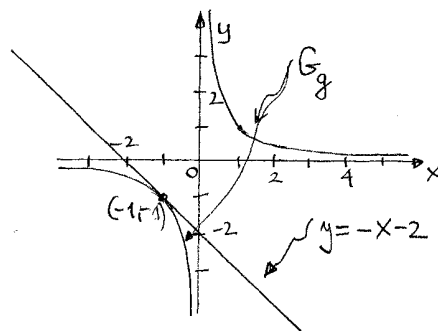
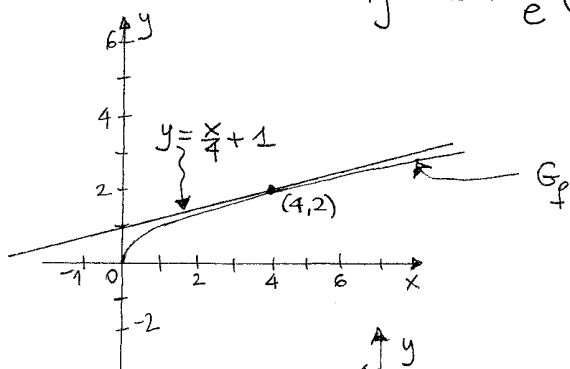
L'eq. della retta tg. al grafico di g nel pt. $(-1,-1)$ è

$$y = -1 - \frac{1}{1}(x+1) \Rightarrow \underline{\underline{y = -x-2}}. \quad \square$$

c) $h(x) = \log x$ $h'(x) = \frac{1}{x}$ per $x > 0$.

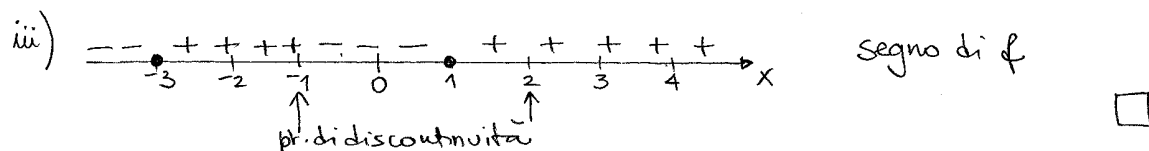
L'eq. della retta tg. al grafico di h nel pt. $(e,1)$ è

$$\bar{y} = 1 + \frac{1}{e}(x-e) \Rightarrow \underline{\underline{y = \frac{1}{e}x}}. \quad \square$$



6) i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \underline{\underline{-\infty}}$; $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \underline{\underline{+\infty}}$; $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \underline{\underline{0}}$;
 $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \underline{\underline{1}}$; $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \underline{\underline{2}}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \underline{\underline{1}}$. □

ii) $x = -1$; $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$; $f(-2) = 2$; $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 0$;
 $x = 2$; $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1 = f(2) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2$. □



iv) $x = -1$ asintoto verticale per f ;
 $y = 1$ asintoto orizzontale per f per $x \rightarrow +\infty$. □

