

Università degli Studi di Trento - Facoltà di Scienze Cognitive
 CdL in Scienze e Tecniche di Psicologia Cognitiva
 CdL in Interfacce e Tecnologie della Comunicazione - CdL in Filosofia
 Corso di ANALISI MATEMATICA (CON ELEMENTI DI ALGEBRA)
 a.a. 2010-2011 - Rovereto, 15-19 novembre 2010.

$$1) x^2 \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{2} + x \log \frac{1}{e^2} = \log_3 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \cdot \frac{1}{2} - x \cdot 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \Rightarrow S = \{0, 4\}. \quad \square$$

$$\frac{3^{x^2} \cdot 3}{3^{2|x|}} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 3^{x^2+1-2|x|} = 3^0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2|x| + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 2x + 1 = 0 \end{cases} \quad \circ \quad \begin{cases} x < 0 \\ x^2 + 2x + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow S = \{-1, 1\}. \quad \square$$

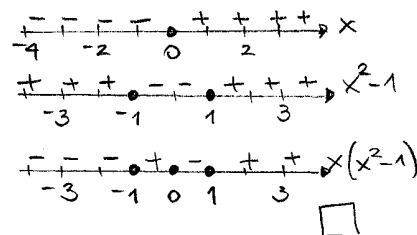
$$5^x \left(\frac{1}{5}\right)^{x+1} = 125^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad 5^{x-|x+1|} = 5^{-3} \quad \Leftrightarrow \quad x - |x+1| = -3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x - (x+1) = -3 \end{cases} \quad \circ \quad \begin{cases} x < -1 \\ x + (x+1) = -3 \end{cases} \Rightarrow S = \{-2\}$$

$$2) \left(\frac{1}{3}\right)^{x^3-x} > 1 \quad \Leftrightarrow \quad 3^{-x^3+x} > 3^0 \quad \Leftrightarrow \quad -x^3+x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(x^2-1) < 0$$

3^x è crescente

$$S =]-\infty, -1[\cup]0, 1[$$



$$2^{-x} \cdot 2^{-x^2+4} < 4^x \quad \Leftrightarrow \quad 2^{-x-x^2+4} < 2^{2x} \quad \Leftrightarrow \quad -x-x^2+4 < 2x$$

2^x è crescente

$$\Leftrightarrow x^2+x-4 > -2x \quad \Leftrightarrow \quad x^2+3x-4 > 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x+4) > 0 \Rightarrow S =]-\infty, -4[\cup]1, +\infty[. \quad \square$$

$$3^{2x-x^2} - \left(\frac{1}{3}\right)^{-x} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3^{2x-x^2} - 3^x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3^{2x-x^2} > 3^x$$

$$\Leftrightarrow 2x-x^2 > x \quad \Leftrightarrow \quad x-x^2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2-x < 0$$

3^x è crescente

$$\Rightarrow S =]0, 1[. \quad \square$$

$$\log |x| \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \neq 0 \\ |x| \leq 1 \end{cases} \Rightarrow S = [-1, 1] \setminus \{0\} \quad \square$$

$$\log_{\frac{1}{4}} (|x+1|+1) > -1 \quad \Leftrightarrow \quad \log_{\frac{1}{4}} (|x+1|+1) > \log_{\frac{1}{4}} 4$$

$$\Leftrightarrow |x+1|+1 < 4 \quad \Leftrightarrow \quad |x+1| < 3$$

$\log_{\frac{1}{4}} x$ è decrescente

$$\Leftrightarrow -3 < x+1 < 3 \quad \Leftrightarrow \quad -4 < x < 2 \Rightarrow S =]-4, 2[. \quad \square$$

$$\log_2(x^2-4) < 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4 > 0 \\ \log_2(x^2-4) < \log_2 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2 \text{ o } x > 2 \\ x^2-4 < 32 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < -2 \text{ o } x > 2 \\ -6 < x < 6 \end{cases} \Rightarrow S =]-6, -2[\cup]2, 6[\quad \square$$

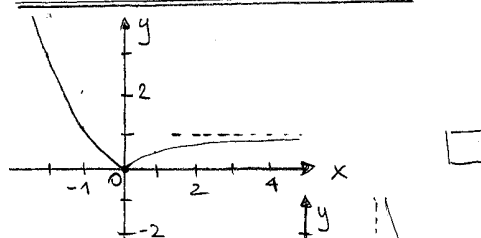
$$\log(x^2+x) \leq -\log\left(\frac{1}{2|x|}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x > 0 \\ x \neq 0 \\ \log(x^2+x) \leq \log(2|x|) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x > 0 \\ x \neq 0 \\ \log x \text{ è crescente} \end{cases} \begin{cases} x^2+x > 0 \\ x \neq 0 \\ x^2+x \leq 2|x| \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \text{ o } x > 0 \\ x^2+x-2|x| \leq 0 \end{cases}$$

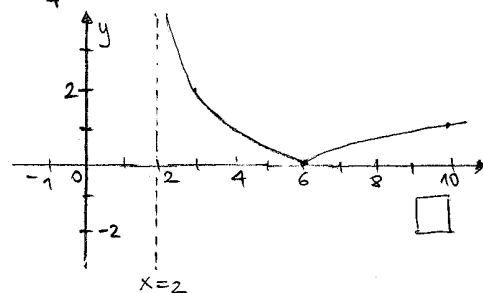
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x^2+x+2x \leq 0 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} x > 0 \\ x^2+x-2x \leq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow S = [-3, -1[\cup]0, 1]. \quad \blacksquare$$

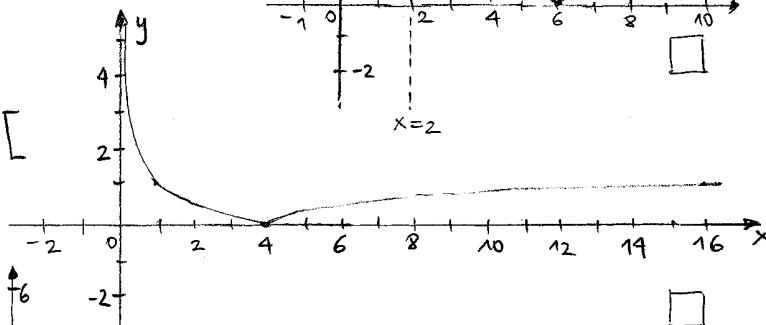
3) $\left|\left(\frac{1}{2}\right)^x - 1\right| \quad \text{dom } f = \mathbb{R}$



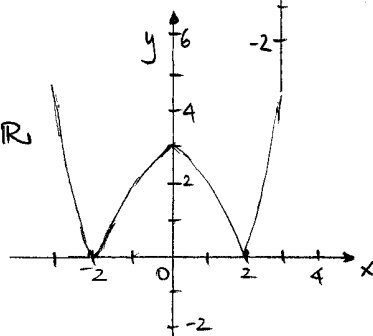
$|\log_2(x-2) - 2| \quad \text{dom } f =]2, +\infty[$



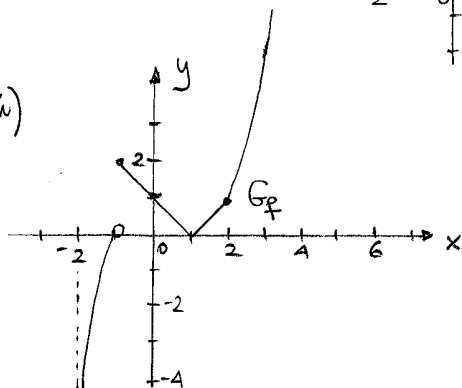
$|\log_{1/4} x + 1| \quad \text{dom } f =]0, +\infty[$



$|4 - 2^{|x|}| \quad \text{dom } f = \mathbb{R}$



4) i)



ii) f è continua in $[-1, 1]$; quindi soddisfa le ipotesi del teorema di Weierstrass.

Su $[-3/2, 1]$ invece f non è continua !!

Non è continua in $x = -1$.

$$\min_{[1,1]} f = 0 \quad x=1 \text{ pt. di minimo ;}$$

$$\max_{[1,1]} f = 2 \quad x=-1 \text{ pt. di massimo.}$$

$$\min_{[-\frac{3}{2}, 1]} f = \log_2 \left(-\frac{3}{2} + 2 \right) = \log_2 \left(\frac{1}{2} \right) = -1 \quad x = -\frac{3}{2} \text{ pt. di minimo ;}$$

$$\max_{[-\frac{3}{2}, 1]} f = 2 \quad x = -1 \text{ pt. di massimo.}$$

(Ricordo che il teorema di Weierstrass dà condizioni sufficienti affinché una funzione ammetta massimo e minimo, ma non necessarie!) $\square$

iii) f non è continua su $[-\frac{3}{2}, 1]$! Nonostante questo su $[-\frac{3}{2}, 0]$, f ammette uno zero, ossia si ha per $x=1$, $f(x)=0$!

(Anche il teorema di esistenza degli zeri dà condizioni sufficienti affinché una funzione ammetta uno zero). $\square$

$$iv) \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \log_2(x+2) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} |x-1| = f(-1) = 2. \quad \blacksquare$$

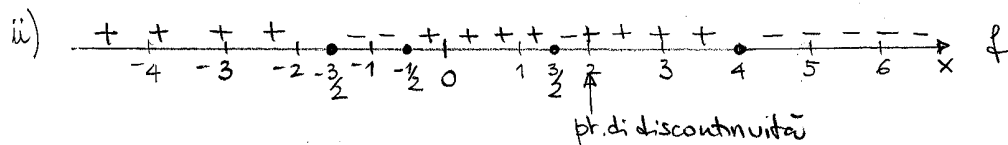
5) Poniamo $f(x) = x^4 - 3x - 1$ su $[-1, 0]$. f è una funzione continua e $f(-1) = 1 + 3 - 1 = 3 > 0$, $f(0) = -1 < 0$. Per il teorema di Jeuru degli zeri $\exists x_0 \in]-1, 0[$ t.c. $f(x_0) = 0$. Inoltre, essendo $f(x)$ decrescente su $[-1, 0]$ (x^4 è decrescente e $-3x-1$ è decrescente!) si ha che x_0 è unico !

Consideriamo il pt. medio di $[-1, 0]$, ossia $x = -\frac{1}{2}$; allora $f(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{16} + \frac{3}{2} - 1 > 0$. Possiamo allora asserire che x_0 sicuramente è contenuto nell'intervallo $]-\frac{1}{2}, 0[$. Consideriamo il pt. medio di $]-\frac{1}{2}, 0[$, ossia $x = -\frac{1}{4}$. Risulta $f(-\frac{1}{4}) = \frac{1}{16 \cdot 16} + \frac{3}{4} - 1 < 0$. Possiamo allora asserire che $x_0 \in]-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}[$ e porre $\tilde{a} = -\frac{1}{2}$, $\tilde{b} = -\frac{1}{4}$.

$$6) i) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1 \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -3 \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$$

□



$$iii) x = -1 \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -3 = f(-1) \neq \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\frac{1}{2}$$

$$x = 2 \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty \quad f(2) = 3 \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2.$$

□

$$iv) \max_{[-2, -1]} f = f(-2) \quad x = -2 \text{ pt. di massimo}$$

$$\min_{[-2, -1]} f = -3 \quad x = -1 \text{ pt. di minimo.}$$

$$\max_{[-2, 2]} f = 3 \quad x = 2 \text{ pt. di massimo.}$$

$$\cancel{\min_{[-2, 2]} f}$$

f soddisfa le ipotesi del teorema di Weierstrass su $[3, 4]$, essendo una funzione continua su un intervallo chiuso e limitato. ■