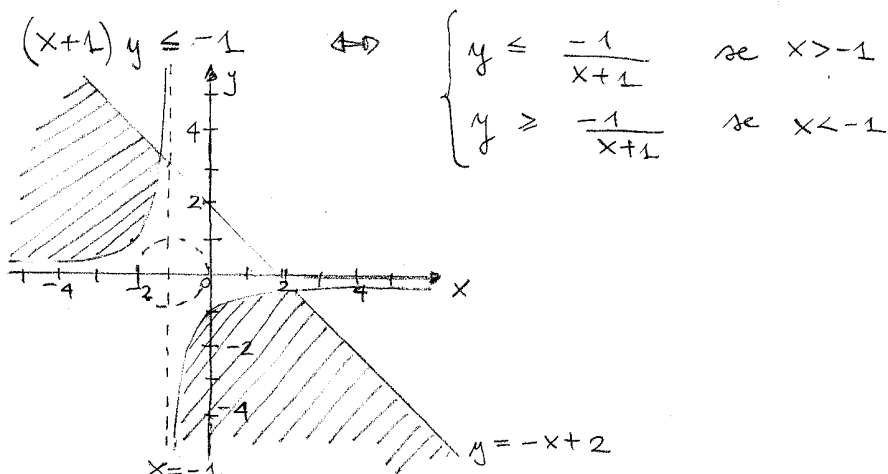


Università di Trento - Facoltà di Scienze Cognitive
 CdL in Scienze e Tecniche di Psicologia Cognitiva
 CdL in Interfacce e Tecnologie della Comunicazione - CdL in Filosofia
 Corso di ANALISI MATEMATICA (CON ELEMENTI DI ALGEBRA)
 Verifica settimanale - Rovereto, 18-22 ottobre 2010

$$1) i) \begin{cases} (x+1)y \leq -1 \\ x^2 + 2x + y^2 > 0 \\ y + x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)y \leq -1 \\ (x+1)^2 + y^2 > 1 \\ y \leq -x + 2 \end{cases}$$

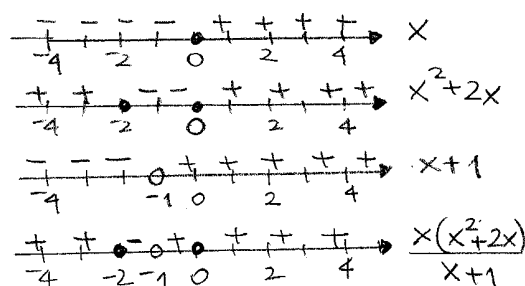


$$ii) \begin{cases} xy = -2 \\ x^2 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{2}{x} & x \neq 0 \\ x < -1 \text{ o } x > 1 \end{cases}$$

$$iii) \begin{cases} x^2 - 9y^2 \leq -1 \\ x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow -x^2 + 9y^2 \geq 1 \Leftrightarrow -x^2 + \frac{y^2}{1/9} \geq 1$$

$$2) i) A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x(x^2 + 2x)}{x+1} < 0 \right\} \\ =]-2, -1[$$

A è limitato inferiormente ed è
 limitato superiormente.
 $\nexists \min A, \nexists \max A.$



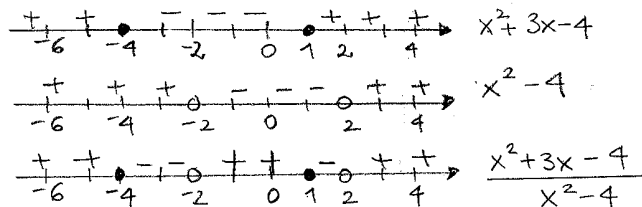
$$ii) B = \{x \in \mathbb{R} : \frac{3x}{x^2-4} \leq -1\}$$

$$\frac{3x+x^2-4}{x^2-4} \leq 0$$

$$= [-4, -2[\cup [1, 2[$$

$$x^2+3x-4=0 \Leftrightarrow x_{1/2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2}$$

$$= \frac{-3 \pm 5}{2} \begin{cases} -4 \\ 1 \end{cases}$$



B è limitato inferiormente ed è limitato superiormente.

Inoltre $\min B = -4$, $\nexists \max B$. □

iii) $C = [0, 4] \cup \{-2\}$, C è limitato inferiormente ed è limitato superiormente.

Si ha $\min C = -2$, $\max C = 4$. □

iv) $D = \{x \in \mathbb{R} : \frac{x^2+1}{x+1} > 0\} =]-1, +\infty[$ (ricordate: $x^2+1 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$)

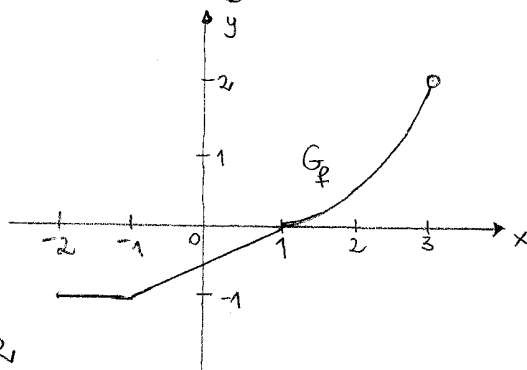
D è limitato inferiormente, D non è limitato superiormente.

$\nexists \min D$, $\nexists \max D$. ■

3) i) $f: [-2, 3[\rightarrow \mathbb{R}$

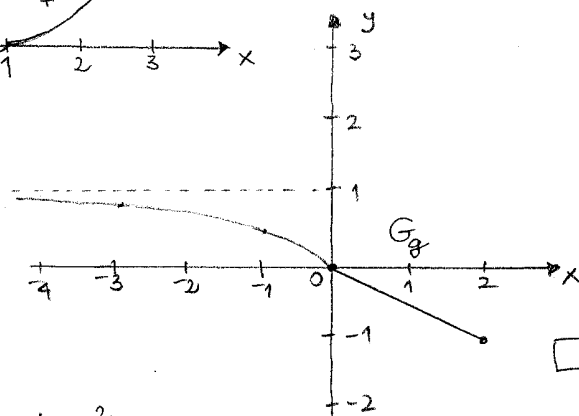
$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } -2 \leq x < -1 \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2} & \text{se } 1 < x < 3 \end{cases}$$

$$\text{NOTA: } \frac{1}{2}(x^2-2x) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(x-1)^2$$



$g:]-\infty, 2] \rightarrow \mathbb{R}$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} + 1 & \text{se } x \leq 0 \\ -\frac{1}{2}x & \text{se } 0 < x \leq 2 \end{cases}$$



$$ii) \underline{f(0)} = \frac{1}{2} \cdot 0 - \frac{1}{2} = \underline{-\frac{1}{2}}$$

$$\underline{f(2)} = \frac{1}{2} \cdot 2^2 - 2 + \frac{1}{2} = \underline{\frac{1}{2}}$$

$$g(1) = -\frac{1}{2} \cdot 1 = \underline{-\frac{1}{2}}$$

Quindi $f(0) = g(1)$. □

iii) $f([-2, 3[) = [-1, 2[$; $g([-1, 2]) = [-1, \frac{1}{2}]$

L'immagine di g è $g(]-\infty, 2]) =]-1, 1[$.



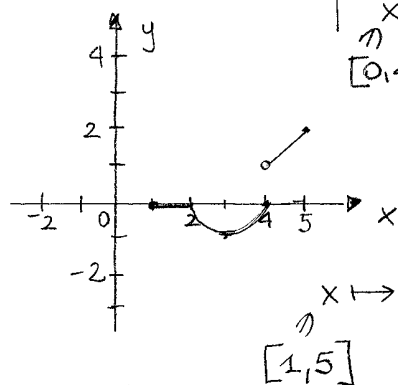
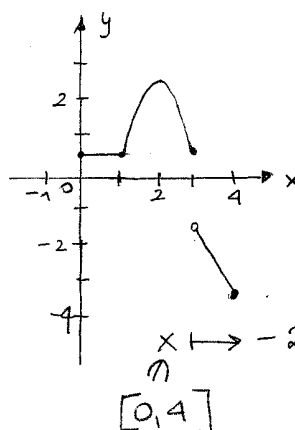
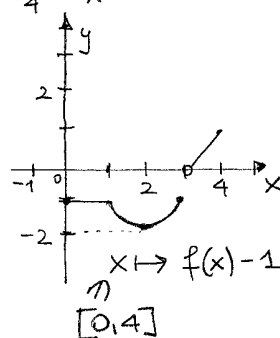
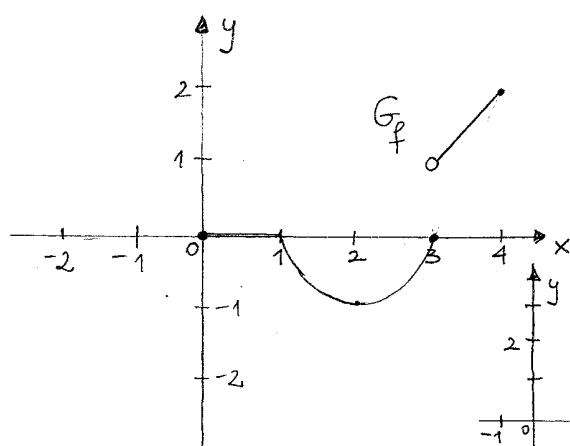
- iv) se $k < -1$ $\nexists$ sono soluzioni dell'eq. $f(x) = k$;
 se $k = -1$ $\exists$ infinite soluzioni " $\nexists$ ";
 se $-1 < k < 2$ $\exists$ una soluzione dell'eq. $f(x) = k$;
 se $k \geq 2$ $\nexists$ sono soluzioni dell'eq. " $\nexists$ ".



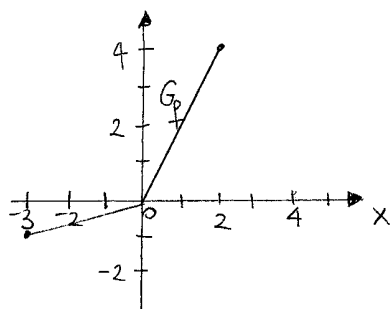
4) $f: [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$

L'immagine di f è dato da

$f([0, 4]) = [-1, 0] \cup]1, 2]$.



5) i) $f: [-3, 2] \rightarrow [-1, 4]$



ii) f è iniettiva: infatti

se $-3 \leq x_1 < x_2 < 0$ si ha

$f(x_1) = \frac{1}{3}x_1 < \frac{1}{3}x_2 = f(x_2)$.

se $-3 \leq x_1 < 0 \leq x_2 \leq 2$ si ha

$f(x_1) = \frac{1}{3}x_1 < 2x_2 = f(x_2)$

-4-

se $0 \leq x_1 < x_2 \leq 2$, si ha

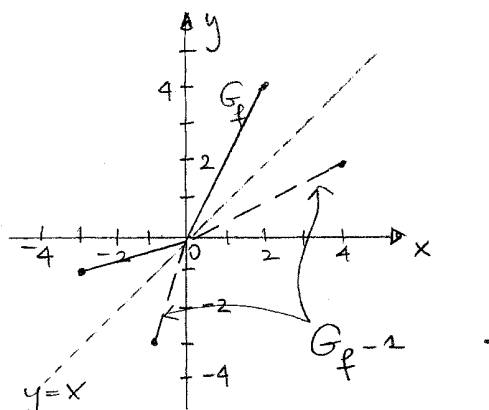
$$f(x_1) = 2x_1 < 2x_2 = f(x_2). \quad \square$$

Inoltre f è suriettiva, poiché $f([-3, 2]) = [-1, 4]$.

(si può facilmente verificare ciò analiticamente).

ii) Essendo f biiettiva, f ammette funzione inversa f^{-1} .

Allora $f^{-1}: [-1, 4] \rightarrow [-3, 2]$



[In questo caso è anche molto semplice scrivere analiticamente $f^{-1}: [-1, 4] \rightarrow [-3, 2]$

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} 3x & \text{se } -1 \leq x < 0 \\ \frac{1}{2}x & \text{se } 0 \leq x \leq 4 \end{cases}.$$

