

Università degli Studi di Trento - Facoltà di Scienze Cognitive
 CdL in Scienze e Tecniche di Psicologia Cognitiva
 CdL in Interfacce e Tecnologie della Comunicazione - CdL in Filosofia
 PRIMO APPELLO DI ANALISI MATEMATICA (CON ELEMENTI DI ALGEBRA)
 SESSIONE INVERNALE, a.a. 2011-2012 - Rovereto, 9 gennaio 2012

FILA C

1) i) $A =$ "Nel 2011 la crisi economica italiana è migliorata";

$B =$ "Nel 2011 l'occupazione giovanile è aumentata".

La proposizione data si scrive quindi in matematica uguale a " $A \wedge B$ ".

Abbiamo dunque " $\text{non}(A \wedge B) \Leftrightarrow (\text{non } A) \vee (\text{non } B)$ " che in italiano corrente si scrive: "Nel 2011 la crisi economica italiana è peggiorata o rimasta invariata oppure l'occupazione giovanile è diminuita o rimasta invariata".

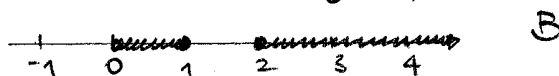
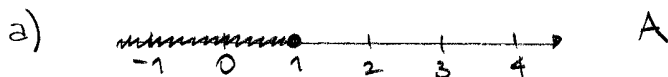
$$\text{ii) } x|x|-1 \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 1 \leq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x < 0 \\ -x^2 - 1 \leq 0 \end{cases} \quad \square$$

$$\Rightarrow \underline{A =]-\infty, 1]}$$

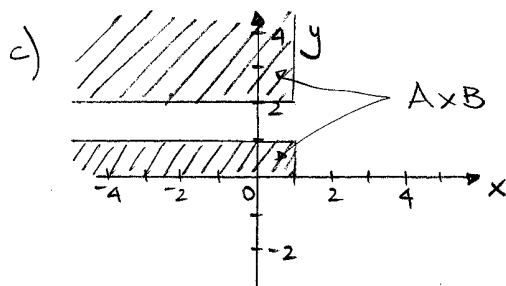
$$0 \leq \frac{3x}{x^2+2} \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 3x \leq x^2+2 \end{cases} \quad (\text{nota: } x^2+2 > 0!)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 0 \leq x^2 - 3x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 1 \vee x \geq 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{B = [0, 1] \cup [2, +\infty[}$$



b) $\underline{A \cup B =]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[}$; $\underline{A \cap B =]-\infty, 0]}$.



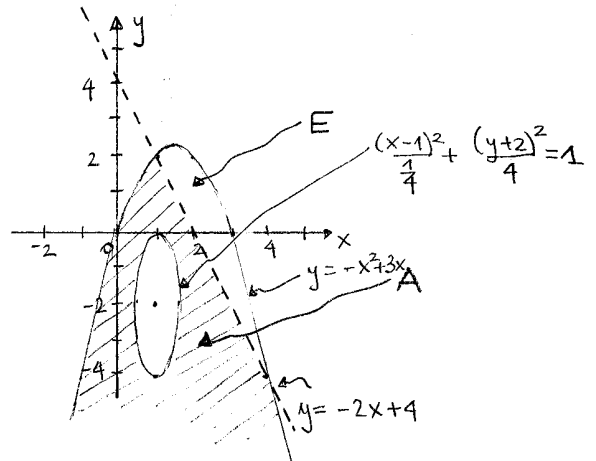
$\square$

$$2) i) \begin{cases} y \leq -x^2 + 3x \\ y < -2x + 4 \\ 16x^2 + y^2 - 32x + 4y + 16 \geq 0 \end{cases}$$

$$-x^2 + 3x = -(x^2 - 3x) = -\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}$$

$$16(x^2 - 2x) + (y^2 + 4y) + 16 \geq 0 \\ 16(x-1)^2 - 16 + (y+2)^2 - 4 + 16 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \leq -\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4} \\ y < -2x + 4 \\ \left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{y+2}{4}\right)^2 \geq 1 \end{cases}$$



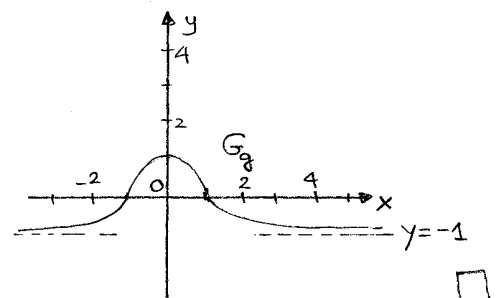
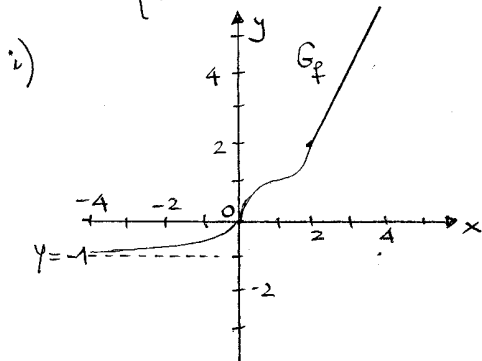
ii) $y = k$ con $k \geq 2$ non intersecano
ma l'insieme A.

$$iii) \text{area}(E) = \int_1^4 [(-x^2 + 3x) - (-2x + 4)] dx \\ = \int_1^4 (-x^2 + 5x - 4) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 5\frac{x^2}{2} - 4x \right]_1^4 = \left(-\frac{64}{3} + 40 - 16 \right) - \left(-\frac{1}{3} + \frac{5}{2} - 4 \right) \\ = -\frac{63}{3} + 28 - \frac{5}{2} = \frac{-126 + 168 - 15}{6} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}$$

3) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

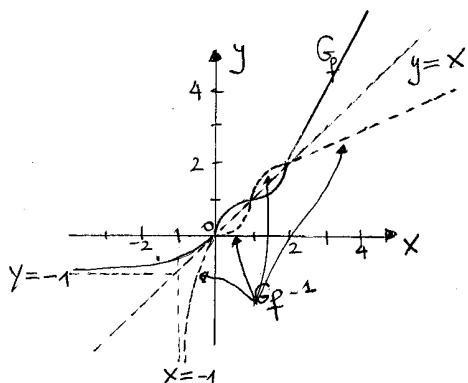
$$f(x) = \begin{cases} e^x - 1 & \text{se } x < 0 \\ (x-1)^3 + 1 & \text{se } 0 \leq x < 2 \\ 2x - 2 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} -x^2 + 1 & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{x^2} - 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



ii) $f(\mathbb{R}) =]-1, +\infty[$; f è limitata inferiormente, non è limitata superiormente.
Quindi f non è limitata.

iii) $f:]-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ esiste, essendo f iniettiva (f è strettamente crescente su $\mathbb{R}$) e $f: \mathbb{R} \rightarrow f(\mathbb{R})$ anche suriettiva.



$$iv) \max_{[-1,3]} g = \underline{1} \quad x=0 \text{ pt. di max.}$$

$$\min_{[-1,3]} g = g(3) = \underline{-\frac{8}{9}} \quad x=3 \text{ pt. di min.}$$

$$v) (f+g)(1) = f(1)+g(1) = 1+0 = \underline{1}$$

$$(fg)(2) = f(2)g(2) = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = \underline{-\frac{3}{4}}$$

$$(f \circ g)(0) = f(g(0)) = f(1) = \underline{1}$$

$$(g \circ f)(0) = g(f(0)) = g(0) = \underline{1}$$

4) Vedi Secondo Prova Intermedia, 9/01/2012, FILA (A), Es. 2.

$$5) f(x) = \frac{1}{(x-1)^3 e^x}$$

$$\bullet \text{ dom } f = \mathbb{R} \setminus \{1\} =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[.$$

$$\bullet \text{ segno di } f: \quad \begin{array}{ccccccc} - & - & - & - & + & + & + \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & \end{array}$$

Nota: $e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{(x-1)^3} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$$

$x=1$ asintota verticale per f

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

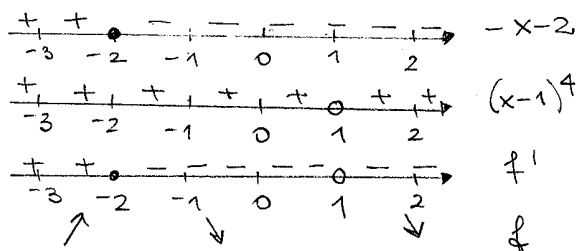
$y=0$ è asintota orizzontale per f , per $x \rightarrow +\infty$.

$\bullet f$ è continua in $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ essendo composizione e rapporto di funzioni continue.

$$\bullet \text{ dom } f' = \mathbb{R} \setminus \{1\} \quad f'(x) = \frac{-[e^x(x-1)^3 + e^x \cdot 3(x-1)^2]}{(x-1)^6 e^{2x}} = \frac{-x-2}{(x-1)^4 e^x}$$

$$x=-2 \text{ punto critico per } f \text{ e } f(-2) = \frac{e^2}{-27} \sim -0.3$$

$x=-2$ è pt. di massimo locale
stretto per f

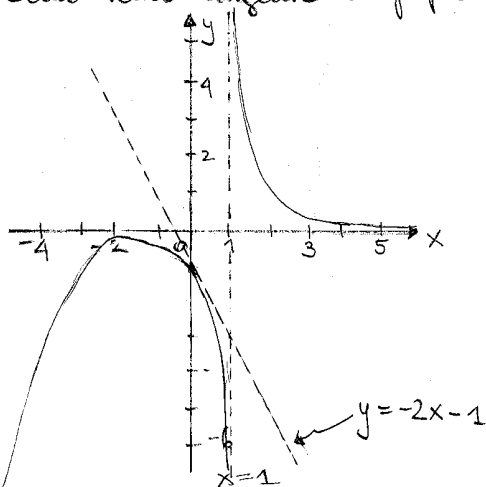


$$\bullet \text{ dom } f'' = \mathbb{R} \setminus \{1\} \quad f''(x) = \frac{-1(x-1)^4 + (x+2)[4(x-1)^3 + (x-1)^4 e^x]}{(x-1)^8 e^{2x}} = \frac{x^2 + 4x + 7}{(x-1)^5 e^x} > 0$$

ii) $y = -1 - 2(x-0)$

$\Rightarrow y = -2x - 1$ è l'eq. della retta tangente al grafico di f nel punto $(0, -1)$.

grafico qualitativo di f



iii) $\int_2^4 \frac{1}{f(x)e^x} dx = \int_2^4 (x-1)^3 dx =$
 $= \left[\frac{(x-1)^4}{4} \right]_2^4 = \frac{3^4}{4} - \frac{1^4}{4} = \frac{81}{4} - \frac{1}{4} = \frac{80}{4} = \underline{\underline{20.}}$

6) Vedi Seconda Prova Intermedia, 9/01/2012, FILA (A), Es. 4.

FILA (D)

1) i) $A = \text{"Nel 2011 l'attività industriale italiana è aumentata"}$

$B = \text{"Nel 2011 il prodotto nazionale lordo è cresciuto"}$

La proposizione data si scrive quindi in matematiche uguali a " $A \wedge B$ ".

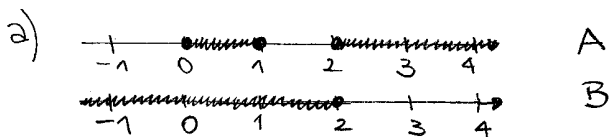
Abbiamo dunque " $\text{non}(A \wedge B) \Leftrightarrow (\text{non } A) \vee (\text{non } B)$ " che in

italiano corrente si scrive: "Nel 2011 l'attività industriale italiana

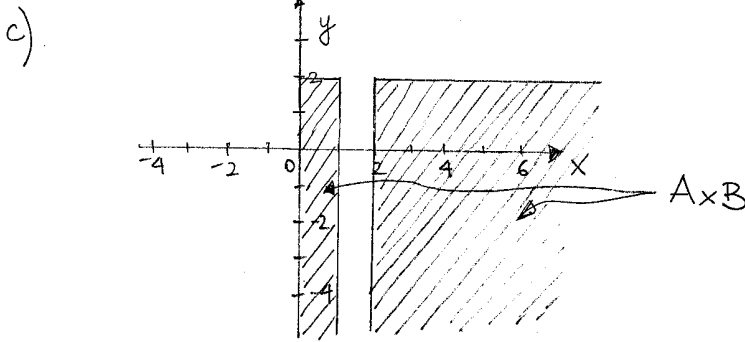
è diminuita o rimasta invariata oppure il prodotto nazionale lordo

è calato o rimasto invariato."

ii) $A = [0, 1] \cup [2, +\infty[$; $B =]-\infty, 2]$. (vedi FILA (C), Es. 1 ii))



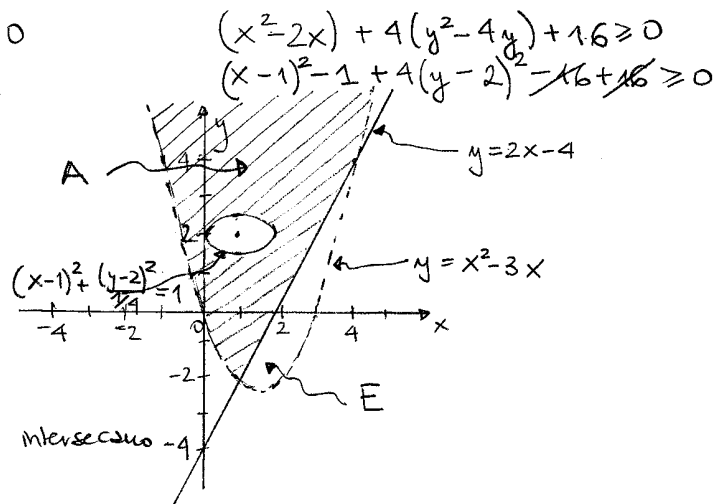
b) $\underline{A \cap B = [0,1] \cup \{2\}}$ $\underline{A \setminus B =]2, +\infty[}$.



2) i)
$$\begin{cases} y > x^2 - 3x \\ y \geq 2x - 4 \\ x^2 + 4y^2 - 2x - 16y + 16 \geq 0 \end{cases}$$

$$x^2 - 3x = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y > \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} \\ y \geq 2x - 4 \\ (x-1)^2 + \frac{(y-2)^2}{4} \geq 1 \end{cases}$



ii) $\underline{y = k}$ con $k \leq -2$ non intersecano A .
mai l'insieme A .

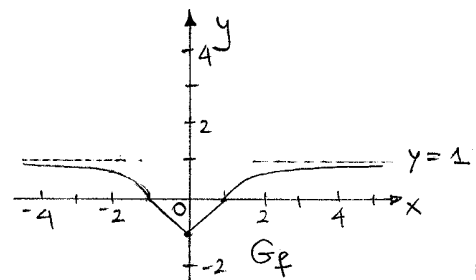
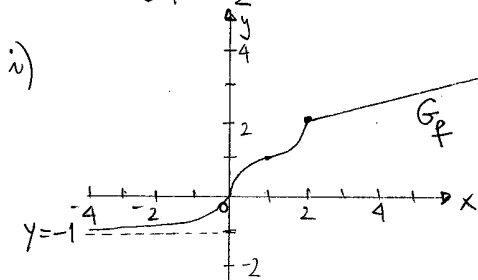
iii) $\text{area}(E) = \int_1^4 [(2x-4) - (x^2-3x)] dx = \int_1^4 (-x^2 + 5x - 4) dx = \underline{\underline{\frac{9}{2}}}$

(vedi FILA (C), Es. 2 iii))

3) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} e^x - 1 & \text{se } x < 0 \\ (x-1)^3 + 1 & \text{se } 0 \leq x < 2 \\ \frac{1}{4}x + \frac{3}{2} & \text{se } x \geq 2, \end{cases}$$

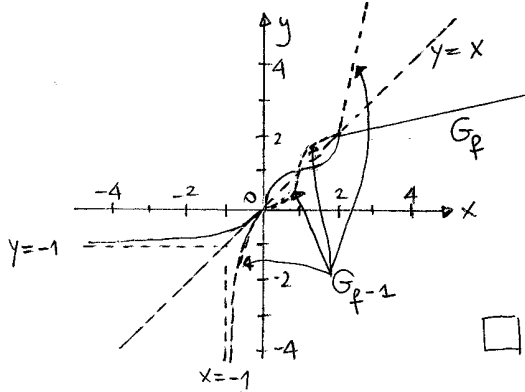
$$g(x) = \begin{cases} |x| - 1 & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ -\frac{1}{x^2} + 1 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$



ii) $\underline{f(\mathbb{R}) =]-1, +\infty[}$; f è limitata inferiormente, non è limitata superiormente.

Quindi f non è limitata. □

iii) $f:]-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ esiste, essendo f iniettiva (f è strettamente crescente in $\mathbb{R}$) e $f: \mathbb{R} \rightarrow f(\mathbb{R})$ anche suriettiva.



iv) $\min_{[-1,3]} g = -1$ $x=0$ pt. di minimo
 $\max_{[-1,3]} g = g(3) = -\frac{1}{9} + 1 = \frac{8}{9}$ $x=3$ pt. di massimo.

v) $(f+g)(1) = f(1) + g(1) = 1 + 0 = 1$

$(fg)(2) = f(2)g(2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$

$(f \circ g)(0) = f(g(0)) = f(-1) = \frac{1}{e} - 1$

$(g \circ f)(0) = g(f(0)) = g(0) = -1.$

4) Vedi Seconda Prova Intermedia, 9/01/2012, FILA(B), Es. 2. ■

5) $f(x) = \frac{1}{(x+1)^3 e^x}$

• $\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{-1\} =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[.$

• segno di f : $\frac{-}{-2} \frac{-}{-1} \frac{0}{0} \frac{+}{0} \frac{+}{1} \frac{+}{2}$

Nota: $e^x > 0 \forall x \in \mathbb{R}$

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{(x+1)^3} = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty$

$x = -1$ asintoto verticale per f

$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

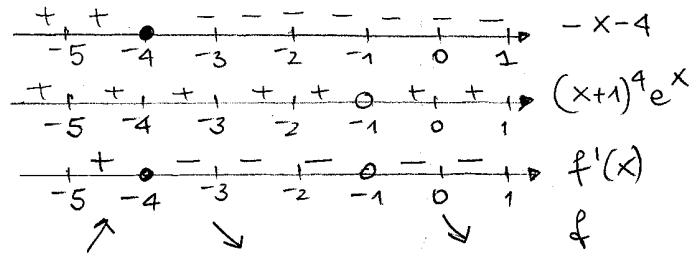
$y = 0$ asintoto orizzontale per f , per $x \rightarrow +\infty$.

• f è continua in $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ essendo composizione e rapporto di funzioni continue.

• $\text{dom } f' = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ $f'(x) = \frac{-[e^x(x+1)^3 + e^x \cdot 3(x+1)^2]}{(x+1)^4 e^{2x}} = \frac{-x-4}{(x+1)^4 e^x}$

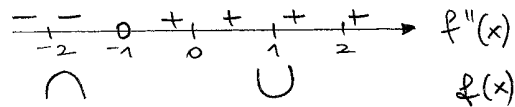
$x = -4$ punto critico di f e $f(-4) = \frac{e^4}{(-3)^3} = -\frac{e^4}{27} \sim -2$

$x = -4$ è pt. di
massimo locale
sotto per f

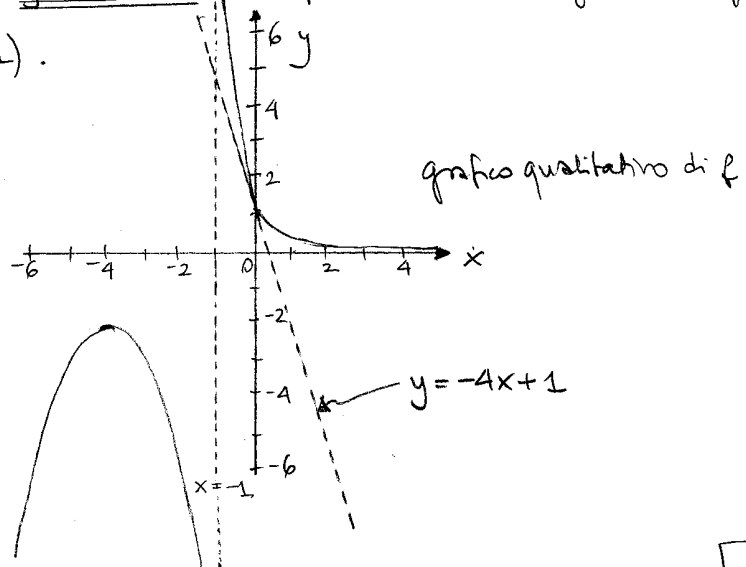


• $\text{dom } f'' = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ $f''(x) = \frac{-(x+1)^4 e^x + (x+4) [4(x+1)^3 e^x + (x+1)^4 e^x]}{(x+1)^{8.5} e^{2x}}$

$$= \frac{-x-1+4x+16+x^2+5x+4}{(x+1)^5 e^x} = \frac{x^2+8x+19}{(x+1)^5 e^x} \stackrel{70}{> 0}$$



ii) $y = 1 - 4(x-0) \Rightarrow \underline{y = -4x + 1}$ è l'eq. della retta tangente al grafico di f nel punto $(0, 1)$.



iii) $\int_2^4 \frac{1}{f(x)e^x} dx = \int_2^4 (x+1)^3 dx = \left[\frac{(x+1)^4}{4} \right]_2^4 = \frac{5^4}{4} - \frac{3^4}{4} = \frac{625}{4} - \frac{81}{4} = \frac{544}{4} = \underline{\underline{136}}$

6) Vedi Seconda Prova Intermedia, 9/01/2012, FIA ③, Es. 4.