Cognome ______________________

Nome ______________________

Matricola

Non scrivere qui

1	2	3	4	5	6

B

Università di Trento — Facoltà di Scienze Cognitive

CdL in Scienze e Tecniche di Psicologia Cognitiva
CdL in Interfacce e Tecnologie della Comunicazione
CdL in Filosofia

Esame scritto di Analisi Matematica (con elementi di Algebra)

A.A. 2011-2012 — Rovereto, 23 Gennaio 2012

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **TRE ORE**.
Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.
È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.
Potete usare solo il vostro materiale di scrittura e il vostro materiale di studio. Non usate il colore rosso.

1) Sia V il vertice della parabola di equazione $y = -x^2 - 2x + 1$ e sia C il centro dell'iperbole di equazione $x^2 - y^2 - 2x + 4y - 7 = 0$.
i) Rappresentate la parabola e l'iperbole nel piano cartesiano.
ii) Determinate l'equazione della retta r passante per V e per C e rappresentatela graficamente nello stesso sistema di riferimento usato al punto i).
iii) Determinate l' equazione della retta perpendicolare ad r passante per C.

2) Siano $f, g : [-4, 4] \to \mathbb{R}$ le funzioni definite da

$$f(x) = \begin{cases} x+4 & \text{se } -4 \leq x \leq -2 \\ 2(x+1)^2 & \text{se } -2 < x < 0 \\ 2^{-x} & \text{se } 0 \leq x \leq 4\,; \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{5}x + \dfrac{4}{5} & \text{se } -4 \leq x < 1 \\ 1 - \log_2 x & \text{se } 1 \leq x \leq 4\,. \end{cases}$$

i) Rappresentate graficamente f e g.
ii) Determinate l'immagine di f. Provate che f non è iniettiva.
iii) f soddisfa le ipotesi del teorema di Weierstrass? Determinate, se esistono, il massimo (risp. i punti di massimo) e il minimo (risp. i punti di minimo) di f su $[-4, 4]$.
iv) Determinate $\displaystyle\sum_{n=1}^{4} f(-\frac{1}{n})$.
v) Determinate, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il numero delle soluzioni dell'equazione $g(x) = k$.
vi) Rappresentate graficamente, nei rispettivi insiemi di definizione, le funzioni

$$x \mapsto -f(x+1)\,; \qquad x \mapsto |g(x)| - 2\,.$$

3) Siano $A = \{x \in \mathbb{R} : 3^{x^2} \cdot 3^{x+1} - (\frac{1}{3})^{-7} \leq 0\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} : |x| - 1 \geq 0\}$.
i) Determinate gli insiemi A e B e rappresentateli sulla retta reale.
ii) Determinate gli insiemi $A \cap B$ e $A \setminus B$. $A \cap B$ è un intervallo?

---

4) i) Calcolate

$$\int_0^1 \frac{x^2}{x^3+2}\, dx\,; \qquad \int_1^2 (\frac{1}{x^2} + \sqrt[4]{x+1} + 3^x)\, dx\,; \qquad \int_0^2 (|x-1| - 2)\, dx\,.$$

ii) Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ le funzioni definite da $f(x) = 2x^2 - 2$ e $g(x) = -|x| + 1$. Rappresentate graficamente f e g. Determinate l'area della regione piana delimitata dai grafici di f e di g.

iii) Calcolate $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} (\frac{1}{(k+1)^2} - \frac{1}{k^2})$.

---

5) i) Studiate (insieme di definizione, segno, comportamento agli estremi dell'insieme di definizione, continuità, derivabilità, punti critici e monotonia, convessità/concavità) la funzione definita da

$$f(x) = x^4 + 2x^3$$

e rappresentatela graficamente nel piano cartesiano.
ii) Determinate le equazioni delle rette tangenti al grafico di f nel punto di ascissa $x = -2$ e nel punto di ascissa $x = 1$. Rappresentatele graficamente nello stesso sistema di riferimento della f.
iii) Calcolate l'area della regione piana delimitata dal grafico di f e dalle due rette determinate nel punto ii).

---

6) Determinate una funzione continua e derivabile $f : [-1, 3] \to \mathbb{R}$ soddisfacente tutte le seguenti proprietà:
i) f non ha segno costante su $[-1, 3]$;
ii) la funzione derivata f' è negativa su $]-1, 3[$;
iii) $\displaystyle\int_{-1}^{3} f(x)\, dx > 0$.

COGNOME ______________	NON SCRIVERE QUI	C
NOME ______________	1 2 3 4 5 6	
MATRICOLA ⌊_⌊_⌊_⌊_⌊_⌊_⌋		

UNIVERSITÀ DI TRENTO — FACOLTÀ DI SCIENZE COGNITIVE

CDL IN SCIENZE E TECNICHE DI PSICOLOGIA COGNITIVA
CDL IN INTERFACCE E TECNOLOGIE DELLA COMUNICAZIONE
CDL IN FILOSOFIA

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA (CON ELEMENTI DI ALGEBRA)

A.A. 2011-2012 — ROVERETO, 23 GENNAIO 2012

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **TRE ORE**.
Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.
È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.
Potete usare solo il vostro materiale di scrittura e il vostro materiale di studio. Non usate il colore rosso.

---

1) Sia V il vertice della parabola di equazione $y = x^2 - 2x - 1$ e sia C il centro dell'iperbole di equazione $x^2 - y^2 + 2x - 4y - 7 = 0$.
i) Rappresentate la parabola e l'iperbole nel piano cartesiano.
ii) Determinate l'equazione della retta r passante per V e per C e rappresentatela graficamente nello stesso sistema di riferimento usato al punto i).
iii) Determinate l' equazione della retta perpendicolare ad r passante per C.

---

2) Siano $f, g : [-4, 4] \to \mathbb{R}$ le funzioni definite da

$$f(x) = \begin{cases} -x-2 & \text{se } -4 \le x \le -2 \\ -(x+1)^2 + 1 & \text{se } -2 < x < 0 \\ 2^{-x+1} & \text{se } 0 \le x \le 4\,; \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{5}x + \dfrac{3}{5} & \text{se } -4 \le x < 1 \\ 1 - \log_2 x & \text{se } 1 \le x \le 4\,. \end{cases}$$

i) Rappresentate graficamente f e g.
ii) Determinate l'immagine di f. Provate che f non è iniettiva.
iii) f soddisfa le ipotesi del teorema di Weierstrass? Determinate, se esistono, il massimo (risp. i punti di massimo) e il minimo (risp. i punti di minimo) di f su $[-4, 4]$.
iv) Determinate $\displaystyle\sum_{n=1}^{4} f(-\frac{1}{n})$.
v) Determinate, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il numero delle soluzioni dell'equazione $g(x) = k$.
vi) Rappresentate graficamente, nei rispettivi insiemi di definizione, le funzioni

$$x \mapsto -f(x+1)\,; \qquad x \mapsto |g(x)| - 2\,.$$

3) Siano $A = \{x \in \mathbb{R} : 2^{x^2} \cdot 2^{x+1} - (\frac{1}{2})^{-3} \leq 0\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} : |x| - 1 < 0\}$.
i) Determinate gli insiemi A e B e rappresentateli sulla retta reale.
ii) Determinate gli insiemi $A \cap B$ e $A \setminus B$. $A \setminus B$ è un intervallo?

---

4) i) Calcolate

$$\int_0^1 \frac{x^2}{x^3+1}\,dx\,; \qquad \int_1^2 (2^x + \sqrt[3]{x+1} + \frac{1}{x^2})\,dx\,; \qquad \int_{-2}^0 (|x+1| - 2)\,dx\,.$$

ii) Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ le funzioni definite da $f(x) = -4x^2 + 4$ e $g(x) = |x| - 1$. Rappresentate graficamente f e g. Determinate l'area della regione piana delimitata dai grafici di f e di g.

iii) Calcolate $\displaystyle\sum_{m=2}^{10} (\frac{1}{m^2} - \frac{1}{(m-1)^2})$.

---

5) i) Studiate (insieme di definizione, segno, comportamento agli estremi dell'insieme di definizione, continuità, derivabilità, punti critici e monotonia, convessità/concavità) la funzione definita da

$$f(x) = -x^4 + 2x^3$$

e rappresentatela graficamente nel piano cartesiano.
ii) Determinate le equazioni delle rette tangenti al grafico di f nel punto di ascissa $x = -1$ e nel punto di ascissa $x = 2$. Rappresentatele graficamente nello stesso sistema di riferimento della f.
iii) Calcolate l'area della regione piana delimitata dal grafico di f e dalle due rette determinate nel punto ii).

---

6) Determinate una funzione continua e derivabile $f : [-2, 4] \to \mathbb{R}$ soddisfacente tutte le seguenti proprietà:
i) f non ha segno costante su $[-2, 4]$;
ii) la funzione derivata f' è positiva su $]-2, 4[$;
iii) $\displaystyle\int_{-2}^4 f(x)\,dx < 0$.