COGNOME ______________________

NOME ______________________

MATRICOLA └┴┴┴┴┴┘

NON SCRIVERE QUI

1	2	3	4	5	6

A

UNIVERSITÀ DI TRENTO — FACOLTÀ DI SCIENZE COGNITIVE

CDL IN SCIENZE E TECNICHE DI PSICOLOGIA COGNITIVA
CDL IN INTERFACCE E TECNOLOGIE DELLA COMUNICAZIONE
CDL IN FILOSOFIA

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA (CON ELEMENTI DI ALGEBRA)

A.A. 2011-2012 — ROVERETO, 13 FEBBRAIO 2012

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **TRE ORE**.
Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.
È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.
Potete usare solo il vostro materiale di scrittura e il vostro materiale di studio. Non usate il colore rosso.

1) i) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ due proposizioni. Provate che la proposizione

$$\text{" } \mathcal{A} \textbf{ e } \mathcal{B} \iff \textbf{non}[(\textbf{non}\mathcal{A})\textbf{o}(\textbf{non}\mathcal{B})] \text{ "}$$

è una tautologia.
ii) Sia $\mathcal{A}$ la proposizione definita da $\mathcal{A} =$ " $\exists x \in \mathbb{N} : x+2 > x^2$ ". Scrivete la proposizione **non**$\mathcal{A}$ (in modo che la negazione compaia il più internamente possibile), e dite quale delle due è vera e quale è falsa.

2) i) Rappresentate graficamente le funzioni $f :]-\infty, 5] \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite da

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} + 1 & \text{se } x \leq -1 \\ -2\sqrt[3]{x} & \text{se } -1 < x < 1 \\ \sqrt{x-1} - 2 & \text{se } 1 \leq x \leq 5\,; \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{se } x < 0 \\ \dfrac{x^2}{2} + 2 & \text{se } 0 \leq x < 2 \\ 2^x & \text{se } x \geq 2\,. \end{cases}$$

ii) Determinate l'immagine di g. Rappresentate graficamente la funzione inversa

$$g^{-1} : g(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

(motivando la sua esistenza).
iii) Calcolate, se sono ben definiti, $(f+g)(0)$; $(gf)(1)$; $(f \circ g)(0)$; $(g \circ f)(1)$.
iv) Rappresentate graficamente, nei rispettivi insiemi di definizione, le funzioni

$$x \mapsto -2f(x)\,; \qquad x \mapsto |g(x-1)|\,.$$

3) Sia A l'insieme delle coppie (x,y) nel piano cartesiano soddisfacenti il sistema di disequazioni

$$\begin{cases} x^2+2x \le y \\ y \le x+2 \end{cases}$$

e $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2-1>0\}$.
i) Rappresentate graficamente l'insieme $A \cap B$.
ii) Sia $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 16x^2+9y^2 \le 144\}$. Rappresentate graficamente l'insieme $E \setminus A \cap B$.

---

4) i) Determinate, al variare di $k \in \{1,2,3\}$ il seguente limite $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{-x}+3x^k}{1+4x^2}$.
ii) Calcolate

$$\int_1^2 \frac{x^2+\sqrt{x}}{3x^3}\,dx\,; \qquad\qquad \sum_{n=1}^{4}\int_{n-1}^{n+1} ||x|-1|\,dx\,.$$

iii) Siano $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ le funzioni definite da $f(x)=2^x$ e $g(x)=2(x-2)^2$. Rappresentate graficamente la regione piana E delimitata dai grafici di f e di g, e dalle rette di equazione $x=1$ e $x=3$. Calcolate l'area di E.

---

5) i) Studiate (insieme di definizione, segno, comportamento agli estremi dell'insieme di definizione, continuità, derivabilità, punti critici e monotonia) la funzione definita da

$$f(x) = \frac{4x^2+3x}{x^2+1}$$

e rappresentatela graficamente nel piano cartesiano.
ii) Determinate i punti del grafico di f in cui la retta tangente al grafico risulta una retta orizzontale.
iii) Determinate le equazioni di tali rette tangenti.

---

6) i) Determinate l'insieme di definizione della funzione $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x-1)$. Determinate le coppie $(x, f(x))$ per $x = \dfrac{5}{4}$; $x = \dfrac{3}{2}$; $x=2$; $x=3$ e $x=5$.
ii) Rappresentate graficamente, nel suo insieme di definizione, $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x-1)$ indicando le coppie $(x,f(x))$ determinate nel punto i).
iii) Risolvete graficamente la disequazione $\log_{\frac{1}{2}}(x-1) \le 2x - \dfrac{1}{2}$.

COGNOME	____________________	NON SCRIVERE QUI	B
NOME	____________________	1 2 3 4 5 6	
MATRICOLA	⌊_⌊_⌊_⌊_⌊_⌊_⌋		

UNIVERSITÀ DI TRENTO — FACOLTÀ DI SCIENZE COGNITIVE

CDL IN SCIENZE E TECNICHE DI PSICOLOGIA COGNITIVA
CDL IN INTERFACCE E TECNOLOGIE DELLA COMUNICAZIONE
CDL IN FILOSOFIA

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA (CON ELEMENTI DI ALGEBRA)

A.A. 2011-2012 — ROVERETO, 13 FEBBRAIO 2012

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **TRE ORE**.
Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.
È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.
Potete usare solo il vostro materiale di scrittura e il vostro materiale di studio. Non usate il colore rosso.

---

1) i) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ due proposizioni. Provate che la proposizione

$$\text{" } \mathcal{A} \text{ } \mathbf{o} \text{ } \mathcal{B} \iff \mathbf{non}[(\mathbf{non}\mathcal{A})\mathbf{e}(\mathbf{non}\mathcal{B})] \text{ "}$$

è una tautologia.
ii) Sia $\mathcal{A}$ la proposizione definita da $\mathcal{A} =$ " $\forall x \in \mathbb{N}, x+2 < x^2$ ". Scrivete la proposizione **non**$\mathcal{A}$ (in modo che la negazione compaia il più internamente possibile), e dite quale delle due è vera e quale è falsa.

---

2) i) Rappresentate graficamente le funzioni $f :]-\infty, 5] \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite da

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x^2} - 1 & \text{se } x \le -1 \\ 2\sqrt[3]{x} & \text{se } -1 < x < 1 \\ -\sqrt{x-1} + 2 & \text{se } 1 \le x \le 5\,; \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{2}x + 1 & \text{se } x < 0 \\ x^2 + 1 & \text{se } 0 \le x < 1 \\ 2^x & \text{se } x \ge 1\,. \end{cases}$$

ii) Determinate l'immagine di g. Rappresentate graficamente la funzione inversa

$$g^{-1} : g(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

(motivando la sua esistenza).
iii) Calcolate, se sono ben definiti, $(f+g)(0)$; $(gf)(1)$; $(f \circ g)(0)$; $(g \circ f)(1)$.
iv) Rappresentate graficamente, nei rispettivi insiemi di definizione, le funzioni

$$x \mapsto |f(x)| - 2\,; \qquad x \mapsto -g(x+1)\,.$$

3) Sia A l'insieme delle coppie (x, y) nel piano cartesiano soddisfacenti il sistema di disequazioni

$$\begin{cases} y \leq -x^2 + 2x \\ y > x - 2 \end{cases}$$

e $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 - 1 \geq 0\}$.
i) Rappresentate graficamente l'insieme $A \cap E$.
ii) Sia $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 16\}$. Rappresentate graficamente l'insieme $B \setminus A \cap E$.

---

4) i) Determinate, al variare di $k \in \{1, 2, 3\}$ il seguente limite $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{e^{-x} + 3x^2}{1 + 4x^k}$.
ii) Calcolate

$$\int_1^2 \frac{3x^2 + \sqrt{x}}{2x^3}\, dx\,; \qquad \sum_{n=1}^{4} \int_{n-1}^{n+1} ||x| - 2|\, dx\,.$$

iii) Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ le funzioni definite da $f(x) = 3^x$ e $g(x) = (x-1)^2$. Rappresentate graficamente la regione piana E delimitata dai grafici di f e di g, e dalle rette di equazione $x = 0$ e $x = 2$. Calcolate l'area di E.

---

5) i) Studiate (insieme di definizione, segno, comportamento agli estremi dell'insieme di definizione, continuità, derivabilità, punti critici e monotonia) la funzione definita da

$$f(x) = \frac{4x^2 - 3x}{x^2 + 1}$$

e rappresentatela graficamente nel piano cartesiano.
ii) Determinate i punti del grafico di f in cui la retta tangente al grafico risulta una retta orizzontale.
iii) Determinate le equazioni di tali rette tangenti.

---

6) i) Determinate l'insieme di definizione della funzione $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x + 1)$. Determinate le coppie $(x, f(x))$ per $x = -\dfrac{3}{4}$; $x = -\dfrac{1}{2}$; $x = 0$; $x = 1$ e $x = 3$.
ii) Rappresentate graficamente, nel suo insieme di definizione, $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x + 1)$ indicando le coppie $(x, f(x))$ determinate nel punto i).
iii) Risolvete graficamente la disequazione $\log_{\frac{1}{2}}(x + 1) \leq x + \dfrac{3}{2}$.