

COGNOME _____
NOME _____
MATRICOLA

NON SCRIVERE QUI

1	2	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---

A

UNIVERSITÀ DI TRENTO — FACOLTÀ DI SCIENZE COGNITIVE

CDL IN SCIENZE E TECNICHE DI PSICOLOGIA COGNITIVA
CDL IN INTERFACCE E TECNOLOGIE DELLA COMUNICAZIONE
CDL IN FILOSOFIA

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA (CON ELEMENTI DI ALGEBRA)

A.A. 2011-2012 — ROVERETO, 5 GIUGNO 2012

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **TRE ORE**.

Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.

È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.

Potete usare solo il vostro materiale di scrittura e il vostro materiale di studio. Non usate il colore rosso.

1) Siano f e g le funzioni definite da

$$f(x) = 2|x| - 3 \quad g(x) = \frac{1}{x-1}.$$

- i) Determinate i rispettivi insiemi di definizione. Rappresentate graficamente, nei loro domini, le funzioni f e g .
- ii) Calcolate, se esistono, $(f+g)(2)$, $(fg)(1)$, $(fg)(-1)$, e $(\frac{f}{g})(1)$.
- iii) Scrivete, nei rispettivi insiemi di definizione, le funzioni composte $g \circ f$ e $f \circ g$. Rappresentate graficamente la funzione $f \circ g$.

2) i) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano la funzione $f : [-2, 6] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^x & \text{se } -2 \leq x \leq -1 \\ (x-1)^2 - 1 & \text{se } -1 < x \leq 2 \\ \sqrt{x-2} & \text{se } 2 < x \leq 6. \end{cases}$$

- ii) Rappresentate sulla retta reale il segno della funzione f .
- iii) Determinate gli eventuali intervalli di monotonia della f .
- iv) Dite (motivando la risposta) se f soddisfa le ipotesi del teorema di Weierstrass.
- v) Determinate, se esistono, il massimo (risp. i punti di massimo) e il minimo (risp. i punti di minimo) di f su $[-1, 6]$.
- vi) Rappresentate graficamente la funzione $x \mapsto |f(x) - 3|$.

3) i) Risolvete in \mathbb{R} le seguenti equazioni e/o disequazioni:

a) $2|x - 3| = 4$; $|x^2 - 2x| > 1$; $4|x - 1| + x < 1$;

b) $\log(x - 2) + \log|x| \leq \log 3$; $\left(\frac{\log_2 8 + \log_{1/3} 9}{\log_4 1 + \log_3 \frac{1}{9}}\right)x^2 = 2x$.

ii) Calcolate

$$\int_1^2 \frac{3x^2 - x^5 e^{x^2}}{3x^4} dx; \quad \sum_{n=1}^3 \int_{-1}^2 (x+1)^n dx.$$

4) Sia A l'insieme delle coppie (x, y) nel piano cartesiano soddisfacenti il sistema di disequazioni

$$\begin{cases} -x^2 - 2x \geq y \\ -2x - 4 - y < 0 \end{cases}$$

e $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 - 4 \geq 0\}$.

i) Rappresentate graficamente l'insieme $A \cap B$.

ii) Determinate le equazioni di tutte le rette orizzontali che non intersecano mai l'insieme $A \cap B$.

5) i) Studiate (insieme di definizione, segno, comportamento agli estremi dell'insieme di definizione, asintoti, continuità, derivabilità, punti critici e monotonia) la funzione definita da

$$f(x) = (x - 1)e^{-x^2+x}$$

e rappresentatela graficamente nel piano cartesiano.

ii) Determinate, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = k$.

iii) Determinate il segno di $\int_0^1 f(x) dx$, motivando la risposta.

6) i) Siano \mathcal{A} e \mathcal{B} due proposizioni. Provate che la proposizione \mathcal{C} definita da

$$\mathcal{C} = "[(\mathcal{A} \implies \mathcal{B}) \text{ e } (\text{non} \mathcal{B})] \implies \text{non} \mathcal{A}"$$

è una tautologia.

ii) Sia \mathcal{A} la proposizione definita da $\mathcal{A} = " \forall x \in \mathbb{R}, x^3 \geq x^2 "$. Scrivete la proposizione $\text{non} \mathcal{A}$ (in modo che la negazione compaia il più internamente possibile), e dite quale delle due è vera e quale è falsa.

COGNOME _____

NOME _____

MATRICOLA | | | | | |

NON SCRIVERE QUI

1	2	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---

B

UNIVERSITÀ DI TRENTO — FACOLTÀ DI SCIENZE COGNITIVE

CDL IN SCIENZE E TECNICHE DI PSICOLOGIA COGNITIVA

CDL IN INTERFACCE E TECNOLOGIE DELLA COMUNICAZIONE

CDL IN FILOSOFIA

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA (CON ELEMENTI DI ALGEBRA)

A.A. 2011-2012 — ROVERETO, 5 GIUGNO 2012

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **TRE ORE**.

Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.

È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.

Potete usare solo il vostro materiale di scrittura e il vostro materiale di studio. Non usate il colore rosso.

- 1) i) Siano \mathcal{A} e \mathcal{B} due proposizioni. Provate che la proposizione \mathcal{C} definita da

$$\mathcal{C} = "[(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \text{ e } (\text{non} \mathcal{B})] \Rightarrow \text{non} \mathcal{A}"$$

è una tautologia.

- ii) Sia \mathcal{A} la proposizione definita da $\mathcal{A} = " \forall x \in \mathbb{R}, x^3 \geq x^2 "$. Scrivete la proposizione **non** \mathcal{A} (in modo che la negazione compaia il più internamente possibile), e dite quale delle due è vera e quale è falsa.

- 2) i) Risolvete in \mathbb{R} le seguenti equazioni e/o disequazioni:

a) $2|x - 3| = 4$; $|x^2 - 2x| > 1$; $4|x - 1| + x < 1$;

b) $\log(x - 2) + \log|x| \leq \log 3$; $\left(\frac{\log_2 8 + \log_{1/3} 9}{\log_4 1 + \log_3 \frac{1}{9}}\right)x^2 = 2x$.

- ii) Calcolate

$$\int_1^2 \frac{3x^2 + \sqrt{x}}{3x^3} dx; \quad \sum_{n=1}^3 \int_{-1}^2 (x - 1)^n dx.$$

- 3) i) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano la funzione $f : [-2, 6] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^x & \text{se } -2 \leq x \leq -1 \\ (x-1)^2 - 1 & \text{se } -1 < x \leq 2 \\ \sqrt{x-2} & \text{se } 2 < x \leq 6. \end{cases}$$

- ii) Rappresentate sulla retta reale il segno della funzione f .
 iii) Determinate gli eventuali intervalli di monotonia della f .
 iv) Dite (motivando la risposta) se f soddisfa le ipotesi del teorema di Weierstrass.
 v) Determinate, se esistono, il massimo (risp. i punti di massimo) e il minimo (risp. i punti di minimo) di f su $[-1, 6]$.
 vi) Rappresentate graficamente la funzione $x \mapsto |f(x) - 3|$.
-

- 4) Siano f e g le funzioni definite da

$$f(x) = 3|x| - 4 \quad g(x) = \frac{1}{x-1}.$$

- i) Determinate i rispettivi insiemi di definizione. Rappresentate graficamente, nei loro domini, le funzioni f e g .
 ii) Calcolate, se esistono, $(f+g)(2)$, $(fg)(1)$, $(fg)(-1)$, e $(\frac{f}{g})(1)$.
 iii) Scrivete, nei rispettivi insiemi di definizione, le funzioni composte $g \circ f$ e $f \circ g$. Rappresentate graficamente la funzione $f \circ g$.
-

- 5) i) Studiate (insieme di definizione, segno, comportamento agli estremi dell'insieme di definizione, asintoti, continuità, derivabilità, punti critici e monotonia) la funzione definita da

$$f(x) = (1-x)e^{-x^2+x}$$

- e rappresentatela graficamente nel piano cartesiano.
 ii) Determinate, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = k$.
 iii) Determinate il segno di $\int_0^1 f(x) dx$, motivando la risposta.
-

- 6) Sia A l'insieme delle coppie (x, y) nel piano cartesiano soddisfacenti il sistema di disequazioni

$$\begin{cases} -x^2 - 2x \geq y \\ -2x - 4 - y < 0 \end{cases}$$

- e $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 - 4 \geq 0\}$.
 i) Rappresentate graficamente l'insieme $A \cap B$.
 ii) Determinate le equazioni di tutte le rette verticali che non intersecano mai l'insieme $A \cap B$.
-