

COGNOME \_\_\_\_\_  
NOME \_\_\_\_\_  
MATRICOLA 

--	--	--	--	--	--

NON SCRIVERE QUI

A

--	--	--	--	--	--

UNIVERSITÀ DI TRENTO — FACOLTÀ DI SCIENZE COGNITIVE

CdL IN SCIENZE E TECNICHE DI PSICOLOGIA COGNITIVA  
CdL IN INTERFACCE E TECNOLOGIE DELLA COMUNICAZIONE  
CdL IN FILOSOFIA

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA (CON ELEMENTI DI ALGEBRA)

A.A. 2011-2012 — ROVERETO, 5 GIUGNO 2012

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **TRE ORE**.

**Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.**

**È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti;** al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.

**Potete usare solo il vostro materiale di scrittura e il vostro materiale di studio.** Non usate il colore rosso.

1) Siano  $f$  e  $g$  le funzioni definite da

$$f(x) = 2|x| - 3 \qquad g(x) = \frac{1}{x-1}.$$

i) Determinate i rispettivi insiemi di definizione. Rappresentate graficamente, nei loro domini, le funzioni  $f$  e  $g$ .

ii) Calcolate, se esistono,  $(f+g)(2)$ ,  $(fg)(1)$ ,  $(fg)(-1)$ , e  $\left(\frac{f}{g}\right)(1)$ .

iii) Scrivete, nei rispettivi insiemi di definizione, le funzioni composte  $g \circ f$  e  $f \circ g$ . Rappresentate graficamente la funzione  $f \circ g$ .

2) i) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano la funzione  $f : [-2, 6] \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^x & \text{se } -2 \leq x \leq -1 \\ (x-1)^2 - 1 & \text{se } -1 < x \leq 2 \\ \sqrt{x-2} & \text{se } 2 < x \leq 6. \end{cases}$$

ii) Rappresentate sulla retta reale il segno della funzione  $f$ .

iii) Determinate gli eventuali intervalli di monotonia della  $f$ .

iv) Dite (motivando la risposta) se  $f$  soddisfa le ipotesi del teorema di Weierstrass.

v) Determinate, se esistono, il massimo (risp. i punti di massimo) e il minimo (risp. i punti di minimo) di  $f$  su  $[-1, 6]$ .

vi) Rappresentate graficamente la funzione  $x \mapsto |f(x) - 3|$ .

3) i) Risolvete in  $\mathbb{R}$  le seguenti equazioni e/o disequazioni:

a)  $2|x - 3| = 4$ ;  $|x^2 - 2x| > 1$ ;  $4|x - 1| + x < 1$ ;

b)  $\log(x - 2) + \log|x| \leq \log 3$ ;  $\left(\frac{\log_2 8 + \log_{1/3} 9}{\log_4 1 + \log_3 \frac{1}{9}}\right)x^2 = 2x$ .

ii) Calcolate

$$\int_1^2 \frac{3x^2 - x^5 e^{x^2}}{3x^4} dx; \quad \sum_{n=1}^3 \int_{-1}^2 (x+1)^n dx.$$

---

4) Sia  $A$  l'insieme delle coppie  $(x, y)$  nel piano cartesiano soddisfacenti il sistema di disequazioni

$$\begin{cases} -x^2 - 2x \geq y \\ -2x - 4 - y < 0 \end{cases}$$

e  $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 - 4 \geq 0\}$ .

i) Rappresentate graficamente l'insieme  $A \cap B$ .

ii) Determinate le equazioni di tutte le rette orizzontali che non intersecano mai l'insieme  $A \cap B$ .

---

5) i) Studiate (insieme di definizione, segno, comportamento agli estremi dell'insieme di definizione, asintoti, continuità, derivabilità, punti critici e monotonia) la funzione definita da

$$f(x) = (x - 1)e^{-x^2+x}$$

e rappresentatela graficamente nel piano cartesiano.

ii) Determinate, al variare di  $k \in \mathbb{R}$ , il numero di soluzioni dell'equazione  $f(x) = k$ .

iii) Determinate il segno di  $\int_0^1 f(x) dx$ , motivando la risposta.

---

6) i) Siano  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  due proposizioni. Provate che la proposizione  $\mathcal{C}$  definita da

$$\mathcal{C} = "[(\mathcal{A} \implies \mathcal{B}) \text{ e } (\mathbf{non}\mathcal{B})] \implies \mathbf{non}\mathcal{A}"$$

è una tautologia.

ii) Sia  $\mathcal{A}$  la proposizione definita da  $\mathcal{A} = " \forall x \in \mathbb{R}, x^3 \geq x^2 "$ . Scrivete la proposizione  $\mathbf{non}\mathcal{A}$  (in modo che la negazione compaia il più internamente possibile), e dite quale delle due è vera e quale è falsa.

---

COGNOME \_\_\_\_\_  
NOME \_\_\_\_\_  
MATRICOLA 

--	--	--	--	--	--

NON SCRIVERE QUI

B

--	--	--	--	--	--

UNIVERSITÀ DI TRENTO — FACOLTÀ DI SCIENZE COGNITIVE

CdL IN SCIENZE E TECNICHE DI PSICOLOGIA COGNITIVA  
CdL IN INTERFACCE E TECNOLOGIE DELLA COMUNICAZIONE  
CdL IN FILOSOFIA

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA (CON ELEMENTI DI ALGEBRA)

A.A. 2011-2012 — ROVERETO, 5 GIUGNO 2012

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **TRE ORE**.

**Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.**

**È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti;** al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.

**Potete usare solo il vostro materiale di scrittura e il vostro materiale di studio.** Non usate il colore rosso.

- 1) i) Siano  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  due proposizioni. Provate che la proposizione  $\mathcal{C}$  definita da

$$\mathcal{C} = "[(\mathcal{A} \implies \mathcal{B}) \text{ e } (\text{non}\mathcal{B})] \implies \text{non}\mathcal{A}"$$

è una tautologia.

- ii) Sia  $\mathcal{A}$  la proposizione definita da  $\mathcal{A} = " \forall x \in \mathbb{R}, x^3 \geq x^2 "$ . Scrivete la proposizione **non** $\mathcal{A}$  (in modo che la negazione compaia il più internamente possibile), e dite quale delle due è vera e quale è falsa.

- 2) i) Risolvete in  $\mathbb{R}$  le seguenti equazioni e/o disequazioni:

a)  $2|x - 3| = 4$ ;  $|x^2 - 2x| > 1$ ;  $4|x - 1| + x < 1$ ;

b)  $\log(x - 2) + \log|x| \leq \log 3$ ;  $\left(\frac{\log_2 8 + \log_{1/3} 9}{\log_4 1 + \log_3 \frac{1}{9}}\right)x^2 = 2x$ .

- ii) Calcolate

$$\int_1^2 \frac{3x^2 + \sqrt{x}}{3x^3} dx; \quad \sum_{n=1}^3 \int_{-1}^2 (x - 1)^n dx.$$

- 3) i) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano la funzione  $f : [-2, 6] \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^x & \text{se } -2 \leq x \leq -1 \\ (x-1)^2 - 1 & \text{se } -1 < x \leq 2 \\ \sqrt{x-2} & \text{se } 2 < x \leq 6. \end{cases}$$

- ii) Rappresentate sulla retta reale il segno della funzione  $f$ .  
iii) Determinate gli eventuali intervalli di monotonia della  $f$ .  
iv) Dite (motivando la risposta) se  $f$  soddisfa le ipotesi del teorema di Weierstrass.  
v) Determinate, se esistono, il massimo (risp. i punti di massimo) e il minimo (risp. i punti di minimo) di  $f$  su  $[-1, 6]$ .  
vi) Rappresentate graficamente la funzione  $x \mapsto |f(x) - 3|$ .
- 

- 4) Siano  $f$  e  $g$  le funzioni definite da

$$f(x) = 3|x| - 4 \qquad g(x) = \frac{1}{x-1}.$$

- i) Determinate i rispettivi insiemi di definizione. Rappresentate graficamente, nei loro domini, le funzioni  $f$  e  $g$ .  
ii) Calcolate, se esistono,  $(f+g)(2)$ ,  $(fg)(1)$ ,  $(fg)(-1)$ , e  $\left(\frac{f}{g}\right)(1)$ .  
iii) Scrivete, nei rispettivi insiemi di definizione, le funzioni composte  $g \circ f$  e  $f \circ g$ . Rappresentate graficamente la funzione  $f \circ g$ .
- 

- 5) i) Studiate (insieme di definizione, segno, comportamento agli estremi dell'insieme di definizione, asintoti, continuità, derivabilità, punti critici e monotonia) la funzione definita da

$$f(x) = (1-x)e^{-x^2+x}$$

e rappresentatela graficamente nel piano cartesiano.

- ii) Determinate, al variare di  $k \in \mathbb{R}$ , il numero di soluzioni dell'equazione  $f(x) = k$ .  
iii) Determinate il segno di  $\int_0^1 f(x) dx$ , motivando la risposta.
- 

- 6) Sia  $A$  l'insieme delle coppie  $(x, y)$  nel piano cartesiano soddisfacenti il sistema di disequazioni

$$\begin{cases} -x^2 - 2x \geq y \\ -2x - 4 - y < 0 \end{cases}$$

e  $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 - 4 \geq 0\}$ .

- i) Rappresentate graficamente l'insieme  $A \cap B$ .  
ii) Determinate le equazioni di tutte le rette verticali che non intersecano mai l'insieme  $A \cap B$ .
-