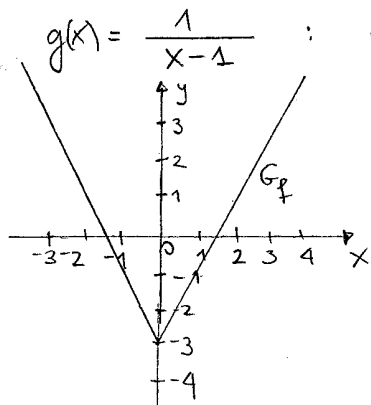


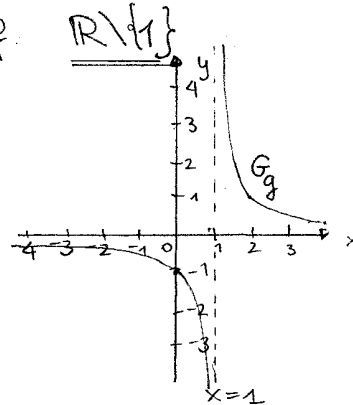
Università degli Studi di Trento - Facoltà di Scienze Cognitive
 Corso di Laurea in Scienze e Tecniche di Psicologia Cognitiva
 Corso di Laurea di Interfacce e Tecnologie della Comunicazione
 Corso di Laurea in Filosofia
 ESAME DI ANALISI MATEMATICA (con ELEMENTI DI ALGEBRA)
 a.a. 2011-2012 - Trento, 5 giugno 2012

FILA (A)

i) $f(x) = 2|x| - 3$: insieme di def. $\mathbb{R}$



$g(x) = \frac{1}{x-1}$: insieme di def. $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

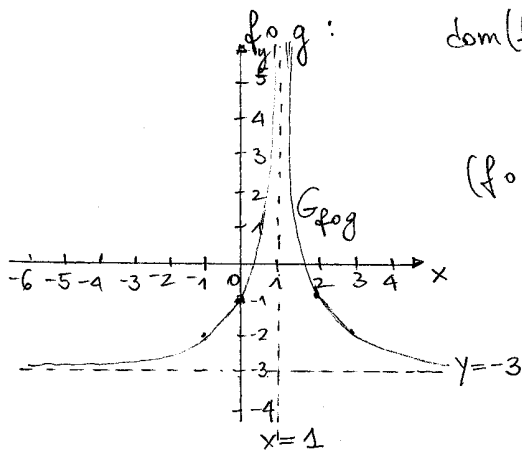


ii) $(f+g)(2) = f(2) + g(2) = 1 + 1 = 2$

$(fg)(1)$ ~~non~~ esiste perché $g(1)$ ~~non~~ esiste. $(fg)(-1) = f(-1) \cdot g(-1) = (-1) \cdot (-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$. $(\frac{f}{g})(1)$ ~~non~~ esiste. $\square$

iii) $g \circ f$: $\text{dom}(g \circ f) = \{x \in \text{dom } f : f(x) \in \text{dom } g\} = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 1\}$
 $= \{x \in \mathbb{R} : 2|x| - 3 \neq 1\} = \{x \in \mathbb{R} : |x| \neq 2\} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$

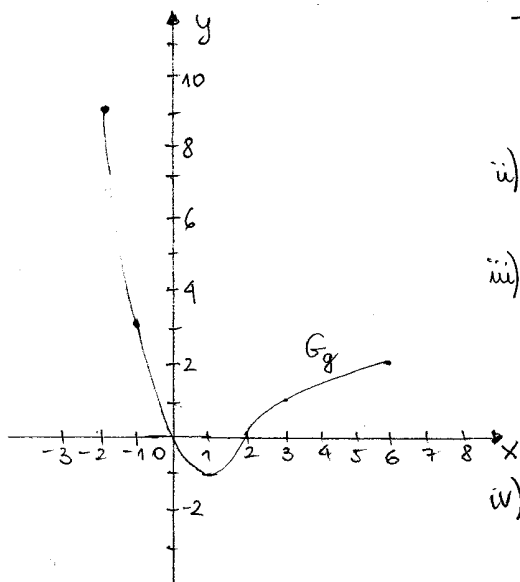
$(g \circ f)(x) \underset{x \in \text{dom}(g \circ f)}{=} g(f(x)) = g(2|x| - 3) = \frac{1}{2|x| - 3 - 1} = \frac{1}{2|x| - 4}$



$\text{dom}(f \circ g) = \{x \in \text{dom } g : g(x) \in \text{dom } f\} = \{x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} : g(x) \in \mathbb{R}\}$
 $= \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$(f \circ g)(x) \underset{x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}}{=} f(g(x)) = f\left(\frac{1}{x-1}\right) = 2\left|\frac{1}{x-1}\right| - 3$

2) $f: [-2, 6] \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^x & \text{se } -2 \leq x \leq -1 \\ (x-1)^2 - 1 & \text{se } -1 < x \leq 2 \\ \sqrt{x-2} & \text{se } 2 < x \leq 6 \end{cases}$



ii) sign chart

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0	1	2	3	4	5	6	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$

iii) $f|_{[-2, 1]}$ è decrescente
 $f|_{[1, 6]}$ è crescente.

iv) f è continua su $[-2, 6]$:

infatti è definito da funzioni continue e

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = f(-1) = 3 = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2) = 0 = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$$

f soddisfa le ipotesi del teorema di Weierstrass.

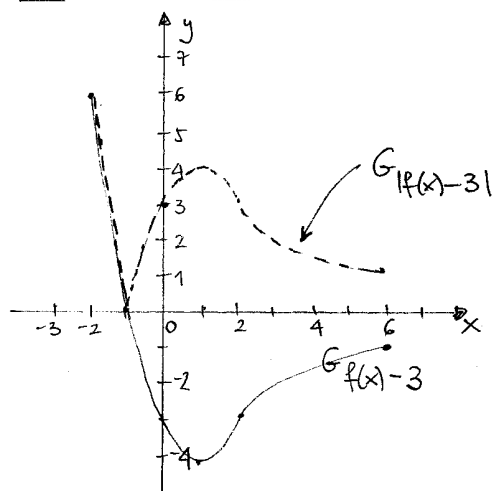
v) $\min_{[-1, 6]} f = -1$

$x = 1$ pr. di minimo.

$\max_{[-1, 6]} f = 3$

$x = -1$ pr. di massimo.

vi)



3) i) a) $2|x-3| = 4 \Leftrightarrow |x-3| = 2 \Leftrightarrow x-3 = \pm 2 \Rightarrow S = \{+1, +5\}$

$|x^2 - 2x| > 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x < -1 \text{ o } x^2 - 2x > 1$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 < 0 \text{ o } x^2 - 2x - 1 > 0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 < 0 \text{ (MAI)} \text{ o } x^2 - 2x - 1 > 0$

o.e. $x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$

$S =]-\infty, 1-\sqrt{2}[\cup]1+\sqrt{2}, +\infty[$

$$A \quad |x-1| + x < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 4(x-1) + x < 1 \end{cases} \quad \circ \quad \begin{cases} x < 1 \\ -4(x-1) + x < 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 5x < 5 \end{cases} \quad \circ \quad \begin{cases} x < 1 \\ -3x < -3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x < 1 \end{cases} \quad \circ \quad \begin{cases} x < 1 \\ x > 1 \end{cases}$$

$$\underline{S = \emptyset}$$

$$b) \log(x-2) + \log|x| \leq \log 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x \neq 0 \\ \log(x-2)|x| \leq \log 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ (x-2)x \leq 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x^2 - 2x - 3 \leq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x > 2 \\ (x-3)(x+1) \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ -1 \leq x \leq 3 \end{cases} \Rightarrow \underline{S = [2, 3]}.$$

$$\left(\frac{\log_2 8 + \log_{1/3} 9}{\log_4 1 + \log_3 \frac{1}{9}} \right) x^2 = 2x \Leftrightarrow \left(\frac{3-2}{-2} \right) x^2 = 2x \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x^2 = 2x$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x = 0 \Rightarrow \underline{S = \{-4, 0\}}. \quad \square$$

$$ii) \int_1^2 \frac{3x^2 - x^5 e^{x^2}}{3x^4} dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{3} x e^{x^2} \right) dx = \left[-\frac{1}{x} - \frac{1}{6} e^{x^2} \right]_1^2 = \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{6} e^4 \right) - \left(-1 - \frac{1}{6} e \right)$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{2} + \frac{e - e^4}{6}}}.$$

$$\sum_{n=1}^3 \int_{-1}^2 (x+1)^n dx = \sum_{n=1}^3 \left[\frac{(x+1)^{n+1}}{n+1} \right]_{-1}^2 = \sum_{n=1}^3 \frac{3^{n+1}}{n+1} = \frac{3^2}{2} + \frac{3^3}{3} + \frac{3^4}{4}$$

$$= \frac{9}{2} + 9 + \frac{81}{4} = \frac{18 + 36 + 81}{4} = \underline{\underline{\frac{135}{4}}} \quad \blacksquare$$

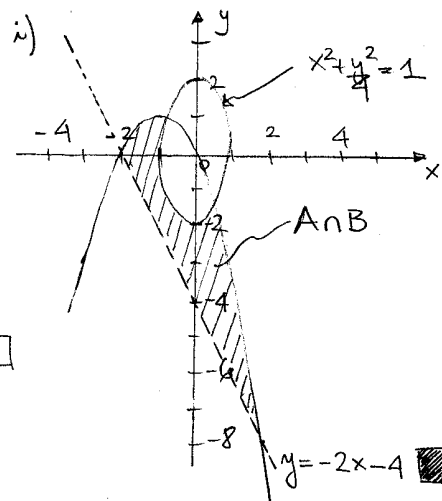
$$4) -x^2 - 2x \geq y \Leftrightarrow -(x+1)^2 + 1 \geq y$$

$$-2x - 4 < y$$

$$\text{Abbiamo } -x^2 - 2x = -2x - 4 \quad x = \pm 2$$

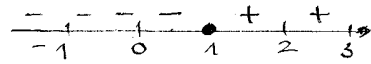
$$4x^2 + y^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{y^2}{4} \geq 1$$

$$ii) y = k \text{ con } k > 1 \quad \circ \quad k \leq -8. \quad \square$$



5) i) $f(x) = (x-1)e^{-x^2+x}$ • $\text{dom } f = \mathbb{R}$

• segno di f



• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{e^{x^2-x}} = 0$

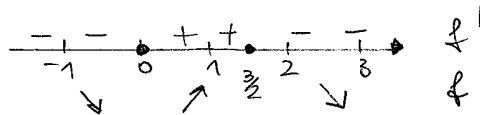
$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{e^{x^2-x}} = 0$

$y=0$ è asintoto orizzontale per f , per $x \rightarrow -\infty$ e per $x \rightarrow +\infty$.

• f è continua perché composizione e prodotto di funzioni continue.

• $\text{dom } f' = \mathbb{R}$ $f'(x) = e^{-x^2+x} + (x-1)e^{-x^2+x}(-2x+1)$
 $= e^{-x^2+x} [1 - 2x^2 + x + 2x - 1] = (-2x^2 + 3x)e^{-x^2+x}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = \frac{3}{2}$ pt. critici per f



$x=0$ pt. di minimo locale e $f(0) = -1$

$x = \frac{3}{2}$ pt. di massimo locale e $f(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}e^{-\frac{9}{4}+\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}e^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{2\sqrt[4]{e^3}} < 1$

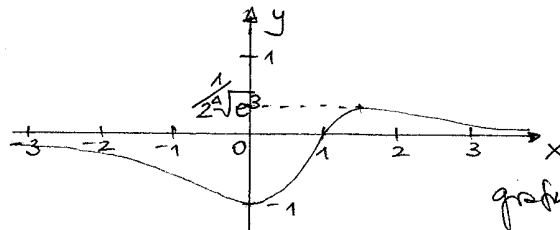


grafico qualitativo di f ! $\square$

ii) se $k < -1$ o $k > \frac{1}{2\sqrt[4]{e^3}}$

Non sono soluzioni di $f(x) = k$

se $k = -1, k = 0, k = \frac{1}{2\sqrt[4]{e^3}}$

$\exists$ una soluzione di $f(x) = k$.

se $-1 < k < \frac{1}{2\sqrt[4]{e^3}}$ con $k \neq 0$

allora $\exists$ sono due soluzioni di $f(x) = k$. $\square$

iii) $\int_0^1 f(x) dx < 0$ poiché $f(x) < 0$ su $[0, 1[$. $\blacksquare$

6) i) A: V V F F
B: V F V F

$A \Rightarrow B$: V F V V
non B: F V F V

$(A \Rightarrow B) \vee (\text{non } B)$: F F F V
non A: F F V V
C: V V V V

Poiché C è sempre vera, indipendente dal valore di verità delle proposizioni che la costituiscono, essa è una tautologia. $\square$

ii) $A = " \forall x \in \mathbb{R}, x^3 \geq x^2 "$.

non $A = " \exists x \in \mathbb{R}: x^3 < x^2 "$. Quest'ultima è vera (e quindi

A è falsa); basta prendere un qualsiasi numero reale negativo,

per esempio, $x = -1$. ■

FILA (B)

1) Vedi FILA (A), Es. 6. ■

2) i) Vedi FILA (A), Es. 3 ii). □

$$\begin{aligned} \text{ii)} \int_1^2 \frac{3x^2 + \sqrt{x}}{3x^3} dx &= \int_1^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{x^{\frac{1}{2}-3}}{3} \right) dx = \left[\log|x| \right]_1^2 + \frac{1}{3} \left[\frac{x^{-\frac{5}{2}+1}}{-\frac{5}{2}+1} \right]_1^2 \\ &= \log 2 - \frac{2}{9} \left[x^{-\frac{3}{2}} \right]_1^2 = \log 2 - \frac{2}{9} \left(\frac{1}{\sqrt{8}} - 1 \right). \end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^3 \int_{-1}^2 (x-1)^n dx = \sum_{n=1}^3 \left[\frac{(x-1)^{n+1}}{n+1} \right]_{-1}^2 = \sum_{n=1}^3 \left[\frac{1}{n+1} - \frac{(-2)^{n+1}}{n+1} \right] =$$

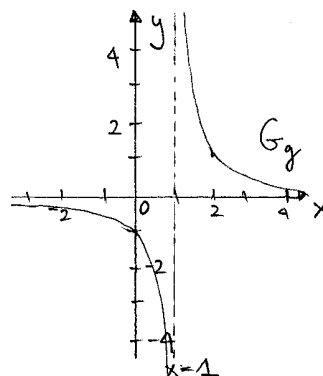
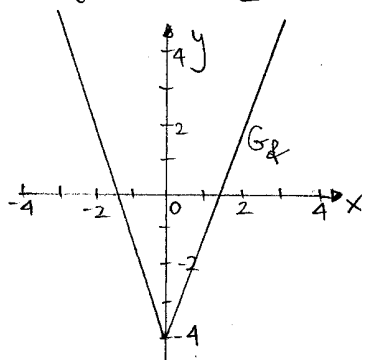
$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{(-2)^2}{2} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{(-2)^3}{3} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{(-2)^4}{4} \right) =$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{2} \right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{8}{3} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{16}{4} \right) = \frac{1}{2} - 2 + 3 + \frac{1}{4} - 4 = \frac{3}{4} - 3 = -\frac{9}{4}$$

3) vedi FILA (A), Es. 2. ■

4) i) $f(x) = 3|x| - 4$: insieme di definizione $\mathbb{R}$

$g(x) = \frac{1}{x-1}$: insieme di definizione $\mathbb{R} \setminus \{1\}$



□

ii) $(f+g)(2) = f(2) + g(2) = 2 + 1 = \underline{\underline{3}}$

$(fg)(1) \nexists$ perché $g(1) \nexists$

$(fg)(-1) = f(-1) \cdot g(-1) = (-1) \cdot (-\frac{1}{2}) = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$

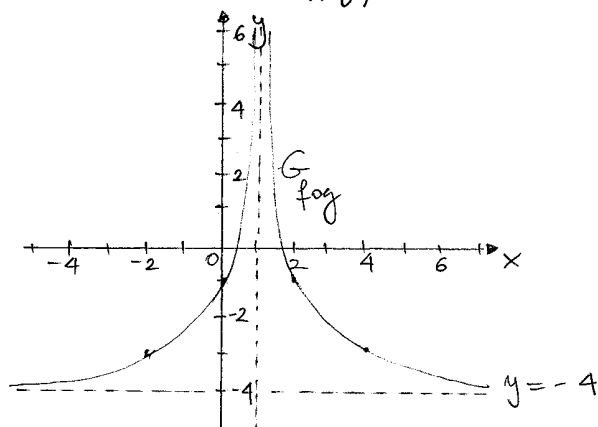
$(\frac{f}{g})(1) \nexists$ perché $g(1) \nexists$ □

iii) $g \circ f$: $\text{dom}(g \circ f) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 1\} = \{x \in \mathbb{R} : 3|x| - 4 \neq 1\} =$
 $= \{x \in \mathbb{R} : |x| \neq \frac{5}{3}\} = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{5}{3}, \frac{5}{3}\}$

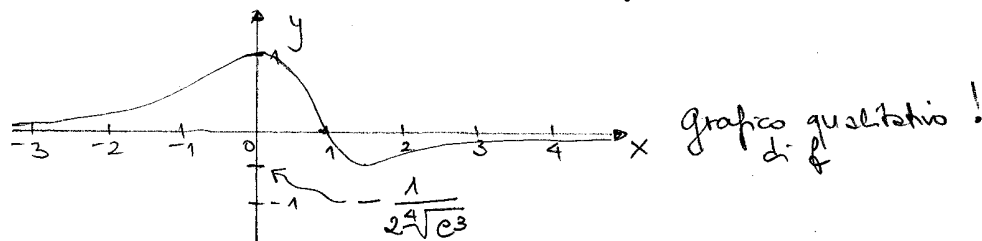
$(g \circ f)(x) \underset{x \in \text{dom}(g \circ f)}{=} g(f(x)) = g(3|x| - 4) = \underline{\underline{\frac{1}{3|x| - 5}}}$

$f \circ g$: $\text{dom}(f \circ g) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$(f \circ g)(x) \underset{x \in \text{dom}(f \circ g)}{=} f(g(x)) = f(\frac{1}{x-1}) = 3|\frac{1}{x-1}| - 4$



5) i) La funzione $f(x) = (1-x)e^{-x^2+x}$ si ottiene moltiplicando la f in Es. 5, FILA (A), per -1 . Quindi il suo grafico è dato da



ii) se $k > 1$ o $k < -\frac{1}{2^2 e^3}$ $\nexists$ soluzioni dell'eq. $f(x) = k$,

se $k = -\frac{1}{2^2 e^3}$, $k = 0$, $k = 1$ $\exists$ una soluzione dell'eq. $f(x) = k$,

se $-\frac{1}{2^2 e^3} < k < 1$ con $k \neq 0$, allora $\exists$ due soluzioni dell'eq. $f(x) = k$.

iii) $\int_0^1 f(x) dx > 0$ perché $f(x) > 0$ su $[0,1[$. 

6) i) Vedi FLA (A), Es. 4, i). 

ii) $x = k$ con $k \leq -2$ o $k \geq 2$. 