

COGNOME \_\_\_\_\_

NOME \_\_\_\_\_

MATRICOLA 

--	--	--	--	--	--

NON SCRIVERE QUI

1	2	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---

C
---

UNIVERSITÀ DI TRENTO — FACOLTÀ DI SCIENZE COGNITIVE

CdL IN SCIENZE E TECNICHE DI PSICOLOGIA COGNITIVA

CdL IN INTERFACCE E TECNOLOGIE DELLA COMUNICAZIONE

CdL IN FILOSOFIA

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA (CON ELEMENTI DI ALGEBRA)

A.A. 2011-2012 — ROVERETO, 9 GENNAIO 2012

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **TRE ORE**.

**Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.**

**È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti;** al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.

**Potete usare solo il vostro materiale di scrittura e il vostro materiale di studio.** Non usate il colore rosso.

- 1) i) Scrivete in matematica la seguente proposizione: "Nel 2011 la crisi economica italiana è migliorata e l'occupazione giovanile è aumentata". Scrivete poi la sua negazione in matematica (portando la negazione il più internamente possibile) e in italiano corrente.

- ii) Siano dati gli insiemi

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x|x| - 1 \leq 0\} \quad B = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq \frac{3x}{x^2 + 2} \leq 1\}.$$

- a) Determinateli e rappresentateli sulla retta reale.  
b) Determinate gli insiemi  $A \cup B$  e  $A \setminus B$ .  
c) Rappresentate graficamente l'insieme  $A \times B$ .

- 2) i) Rappresentate graficamente l'insieme  $A$  delle coppie  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  soddisfacenti il seguente sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} y \leq -x^2 + 3x \\ y < -2x + 4 \\ 16x^2 + y^2 - 32x + 4y + 16 \geq 0. \end{cases}$$

- ii) Scrivete l'equazione delle rette orizzontali che non intersecano mai l'insieme  $A$ .  
iii) Sia  $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq -2x + 4, y \leq -x^2 + 3x\}$ . Determinate l'area di  $E$ .

3) Siano  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  le funzioni definite da

$$f(x) = \begin{cases} e^x - 1 & \text{se } x < 0 \\ (x-1)^3 + 1 & \text{se } 0 \leq x < 2 \\ 2x - 2 & \text{se } x \geq 2, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} -x^2 + 1 & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{x^2} - 1 & \text{se } x < -1 \text{ o } x > 1. \end{cases}$$

- i) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano  $f$  e  $g$ .
  - ii) Determinate l'immagine di  $f$ . Dite se  $f$  è limitata.
  - iii) Rappresentate la funzione inversa  $f^{-1} : f(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  (motivando l'esistenza di  $f^{-1}$ ).
  - iv) Determinate, se esistono, il minimo e/o il massimo (risp. i punti di minimo e/o di massimo) di  $g$  su  $[-1, 3]$ .
  - v) Calcolate  $(f+g)(1)$ ,  $(fg)(2)$ ,  $(f \circ g)(0)$  e  $(g \circ f)(0)$ .
- 

4) i) Calcolate

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{|x| - x^2}; \quad \int_1^e 3 \frac{(\log x)^2}{x} dx; \quad \int_{-1}^5 (|x-1| - 2) dx.$$

- ii) Siano  $f, g : [-1, 8] \rightarrow \mathbb{R}$  le funzioni definite da  $f(x) = \sqrt[3]{x} + 1$  e  $g(x) = -\sqrt{x+1}$ . Rappresentate graficamente  $f$  e  $g$ . Determinate l'area della regione piana delimitata dai grafici di  $f$  e di  $g$  e dalla retta di equazione  $x = 8$ .
- iii) Scrivete, usando il simbolo di sommatoria, la seguente espressione, dove  $x$  è una costante positiva fissata:

$$-\frac{2}{x^2 + 1} + \frac{4}{x^5 + 1} - \frac{8}{x^8 + 1} + \cdots + \frac{256}{x^{23} + 1}.$$

---

5) i) Studiate (insieme di definizione, segno, comportamento agli estremi dell'insieme di definizione, continuità, derivabilità, punti critici e monotonia, convessità/concavità) la funzione definita da

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)^3 e^x}.$$

- ii) Determinate l'equazione della retta tangente al grafico di  $f$  nel punto  $(0, -1)$  e rappresentatela insieme alla funzione  $f$ .
  - iii) Calcolate  $\int_2^4 \frac{1}{f(x)e^x} dx$ .
- 

6) Rappresentate graficamente una funzione continua  $f : [-2, 3] \rightarrow \mathbb{R}$  soddisfacente le seguenti proprietà:

- i)  $f(-2) = 2$  ed  $f$  non è decrescente su  $[-2, 3]$ ;
  - ii) la funzione integrale  $F(x)$  di  $f(x)$  definita da  $F(x) = \int_{-2}^x f(t) dt$  su  $[-2, 3]$  è positiva su  $] -2, 3]$ ; inoltre  $F(x)$  è crescente su  $[-2, 0]$  e decrescente su  $[0, 3]$ .
-

COGNOME _____ NOME _____ MATRICOLA <table style="display: inline-table; border: 1px solid black; text-align: center; width: 100px;"> <tr> <td style="width: 15px; height: 15px;"></td> <td style="width: 15px; height: 15px;"></td> <td style="width: 15px; height: 15px;"></td> <td style="width: 15px; height: 15px;"></td> <td style="width: 15px; height: 15px;"></td> <td style="width: 15px; height: 15px;"></td> </tr> </table>							<div style="text-align: center; margin-bottom: 10px;">NON SCRIVERE QUI</div> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 50%; text-align: center;"> <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">1</td> <td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">2</td> <td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">3</td> <td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">4</td> <td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">5</td> <td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">6</td> </tr> </table> </td> <td style="width: 50%; text-align: center; vertical-align: middle;"> <div style="border: 1px solid black; width: 100px; height: 100px; display: flex; align-items: center; justify-content: center; margin: 0 auto;"> <span style="font-size: 2em; font-weight: bold;">D</span> </div> </td> </tr> </table>	<table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">1</td> <td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">2</td> <td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">3</td> <td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">4</td> <td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">5</td> <td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">6</td> </tr> </table>	1	2	3	4	5	6	<div style="border: 1px solid black; width: 100px; height: 100px; display: flex; align-items: center; justify-content: center; margin: 0 auto;"> <span style="font-size: 2em; font-weight: bold;">D</span> </div>
<table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">1</td> <td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">2</td> <td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">3</td> <td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">4</td> <td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">5</td> <td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">6</td> </tr> </table>	1	2	3	4	5	6	<div style="border: 1px solid black; width: 100px; height: 100px; display: flex; align-items: center; justify-content: center; margin: 0 auto;"> <span style="font-size: 2em; font-weight: bold;">D</span> </div>								
1	2	3	4	5	6										

UNIVERSITÀ DI TRENTO — FACOLTÀ DI SCIENZE COGNITIVE

CdL IN SCIENZE E TECNICHE DI PSICOLOGIA COGNITIVA  
 CdL IN INTERFACCE E TECNOLOGIE DELLA COMUNICAZIONE  
 CdL IN FILOSOFIA

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA (CON ELEMENTI DI ALGEBRA)

A.A. 2011-2012 — ROVERETO, 9 GENNAIO 2012

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **TRE ORE**.

**Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.**

**È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti;** al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.

**Potete usare solo il vostro materiale di scrittura e il vostro materiale di studio.** Non usate il colore rosso.

- 1) i) Scrivete in matematica la seguente proposizione: "Nel 2011 l'attività industriale italiana è aumentata e il prodotto nazionale lordo è cresciuto". Scrivete poi la sua negazione in matematica (portando la negazione il più internamente possibile) e in italiano corrente.

ii) Siano dati gli insiemi

$$A = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq \frac{3x}{x^2 + 2} \leq 1\} \quad B = \{x \in \mathbb{R} : x|x| - 4 \leq 0\}.$$

- a) Determinateli e rappresentateli sulla retta reale.  
 b) Determinate gli insiemi  $A \cap B$  e  $A \setminus B$ .  
 c) Rappresentate graficamente l'insieme  $A \times B$ .

- 2) i) Rappresentate graficamente l'insieme  $A$  delle coppie  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  soddisfacenti il seguente sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} y > x^2 - 3x \\ y \geq 2x - 4 \\ x^2 + 4y^2 - 2x - 16y + 16 \geq 0. \end{cases}$$

- ii) Scrivete l'equazione delle rette orizzontali che non intersecano mai l'insieme  $A$ .  
 iii) Sia  $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 2x - 4, y \geq x^2 - 3x\}$ . Determinate l'area di  $E$ .

3) Siano  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  le funzioni definite da

$$f(x) = \begin{cases} e^x - 1 & \text{se } x < 0 \\ (x-1)^3 + 1 & \text{se } 0 \leq x < 2 \\ \frac{1}{4}x + \frac{3}{2} & \text{se } x \geq 2, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} |x| - 1 & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ -\frac{1}{x^2} + 1 & \text{se } x < -1 \text{ o } x > 1. \end{cases}$$

- i) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano  $f$  e  $g$ .
  - ii) Determinate l'immagine di  $f$ . Dite se  $f$  è limitata.
  - iii) Rappresentate la funzione inversa  $f^{-1} : f(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  (motivando l'esistenza di  $f^{-1}$ ).
  - iv) Determinate, se esistono, il minimo e/o il massimo (risp. i punti di minimo e/o di massimo) di  $g$  su  $[-1, 3]$ .
  - v) Calcolate  $(f+g)(1)$ ,  $(fg)(2)$ ,  $(f \circ g)(0)$  e  $(g \circ f)(0)$ .
- 

4) i) Calcolate

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2 + |x|}; \quad \int_1^e 2 \frac{(\log x)^3}{x} dx; \quad \int_{-2}^3 (|x-1| - 2) dx.$$

ii) Siano  $f, g : [-1, 8] \rightarrow \mathbb{R}$  le funzioni definite da  $f(x) = -\sqrt[3]{x}$  e  $g(x) = \sqrt{x+1} + 1$ . Rappresentate graficamente  $f$  e  $g$ . Determinate l'area della regione piana delimitata dai grafici di  $f$  e di  $g$  e dalla retta di equazione  $x = 8$ .

iii) Scrivete, usando il simbolo di sommatoria, la seguente espressione, dove  $x$  è una costante positiva fissata:

$$\frac{2}{x^4 + 3} - \frac{4}{x^7 + 3} + \frac{8}{x^{10} + 3} - \cdots - \frac{256}{x^{25} + 3}.$$

---

5) i) Studiate (insieme di definizione, segno, comportamento agli estremi dell'insieme di definizione, continuità, derivabilità, punti critici e monotonia, convessità/concavità) la funzione definita da

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)^3 e^x}.$$

ii) Determinate l'equazione della retta tangente al grafico di  $f$  nel punto  $(0, 1)$  e rappresentatela insieme alla funzione  $f$ .

iii) Calcolate  $\int_2^4 \frac{1}{f(x)e^x} dx$ .

---

6) Rappresentate graficamente una funzione continua  $f : [-1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$  soddisfacente le seguenti proprietà:

i)  $f(-1) = 3$  ed  $f$  non è decrescente su  $[-1, 4]$ ;

ii) la funzione integrale  $F(x)$  di  $f(x)$  definita da  $F(x) = \int_{-1}^x f(t) dt$  su  $[-1, 4]$  è positiva su  $]-1, 4]$ ; inoltre  $F(x)$  è crescente su  $[-1, 3]$  e decrescente su  $[3, 4]$ .

---