

COGNOME _____
NOME _____
MATRICOLA | | | | | |

NON SCRIVERE QUI

1	2	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---

C

UNIVERSITÀ DI TRENTO — FACOLTÀ DI SCIENZE COGNITIVE

CDL IN SCIENZE E TECNICHE DI PSICOLOGIA COGNITIVA
CDL IN INTERFACCE E TECNOLOGIE DELLA COMUNICAZIONE
CDL IN FILOSOFIA

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA (CON ELEMENTI DI ALGEBRA)

A.A. 2011-2012 — ROVERETO, 9 GENNAIO 2012

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **TRE ORE**.

Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.

È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.

Potete usare solo il vostro materiale di scrittura e il vostro materiale di studio. Non usate il colore rosso.

- 1) i) Scrivete in matematiche la seguente proposizione: "Nel 2011 la crisi economica italiana è migliorata e l'occupazione giovanile è aumentata". Scrivete poi la sua negazione in matematiche (portando la negazione il più internamente possibile) e in italiano corrente.

- ii) Siano dati gli insiemi

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x|x| - 1 \leq 0\} \quad B = \left\{x \in \mathbb{R} : 0 \leq \frac{3x}{x^2 + 2} \leq 1\right\}.$$

- a) Determinateli e rappresentateli sulla retta reale.
b) Determinate gli insiemi $A \cup B$ e $A \setminus B$.
c) Rappresentate graficamente l'insieme $A \times B$.

- 2) i) Rappresentate graficamente l'insieme A delle coppie $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ soddisfacenti il seguente sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} y \leq -x^2 + 3x \\ y < -2x + 4 \\ 16x^2 + y^2 - 32x + 4y + 16 \geq 0. \end{cases}$$

- ii) Scrivete l'equazione delle rette orizzontali che non intersecano mai l'insieme A .
iii) Sia $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq -2x + 4, y \leq -x^2 + 3x\}$. Determinate l'area di E .

3) Siano $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ le funzioni definite da

$$f(x) = \begin{cases} e^x - 1 & \text{se } x < 0 \\ (x-1)^3 + 1 & \text{se } 0 \leq x < 2 \\ 2x-2 & \text{se } x \geq 2, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} -x^2 + 1 & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{x^2} - 1 & \text{se } x < -1 \text{ o } x > 1. \end{cases}$$

- i) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano f e g .
 - ii) Determinate l'immagine di f . Dite se f è limitata.
 - iii) Rappresentate la funzione inversa $f^{-1} : f(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ (motivando l'esistenza di f^{-1}).
 - iv) Determinate, se esistono, il minimo e/o il massimo (risp. i punti di minimo e/o di massimo) di g su $[-1, 3]$.
 - v) Calcolate $(f+g)(1)$, $(fg)(2)$, $(f \circ g)(0)$ e $(g \circ f)(0)$.
-

4) i) Calcolate

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{|x| - x^2}; \quad \int_1^e 3 \frac{(\log x)^2}{x} dx; \quad \int_{-1}^5 (|x-1| - 2) dx.$$

ii) Siano $f, g : [-1, 8] \rightarrow \mathbb{R}$ le funzioni definite da $f(x) = \sqrt[3]{x} + 1$ e $g(x) = -\sqrt{x+1}$. Rappresentate graficamente f e g . Determinate l'area della regione piana delimitata dai grafici di f e di g e dalla retta di equazione $x = 8$.

iii) Scrivete, usando il simbolo di sommatoria, la seguente espressione, dove x è una costante positiva fissata:

$$-\frac{2}{x^2 + 1} + \frac{4}{x^5 + 1} - \frac{8}{x^8 + 1} + \cdots + \frac{256}{x^{23} + 1}.$$

5) i) Studiate (insieme di definizione, segno, comportamento agli estremi dell'insieme di definizione, continuità, derivabilità, punti critici e monotonia, convessità/concavità) la funzione definita da

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)^3 e^x}.$$

ii) Determinate l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $(0, -1)$ e rappresentatela insieme alla funzione f .

iii) Calcolate $\int_2^4 \frac{1}{f(x)e^x} dx$.

6) Rappresentate graficamente una funzione continua $f : [-2, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ soddisfacente le seguenti proprietà:

i) $f(-2) = 2$ ed f non è decrescente su $[-2, 3]$;

ii) la funzione integrale $F(x)$ di $f(x)$ definita da $F(x) = \int_{-2}^x f(t) dt$ su $[-2, 3]$ è positiva su $[-2, 3]$; inoltre $F(x)$ è crescente su $[-2, 0]$ e decrescente su $[0, 3]$.

COGNOME _____
NOME _____
MATRICOLA | | | | | |

NON SCRIVERE QUI

1	2	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---

D

UNIVERSITÀ DI TRENTO — FACOLTÀ DI SCIENZE COGNITIVE

CDL IN SCIENZE E TECNICHE DI PSICOLOGIA COGNITIVA
CDL IN INTERFACCE E TECNOLOGIE DELLA COMUNICAZIONE
CDL IN FILOSOFIA

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA (CON ELEMENTI DI ALGEBRA)

A.A. 2011-2012 — ROVERETO, 9 GENNAIO 2012

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **TRE ORE**.

Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.

È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.

Potete usare solo il vostro materiale di scrittura e il vostro materiale di studio. Non usate il colore rosso.

- 1) i) Scrivete in matematiche la seguente proposizione: "Nel 2011 l'attività industriale italiana è aumentata e il prodotto nazionale lordo è cresciuto". Scrivete poi la sua negazione in matematiche (portando la negazione il più internamente possibile) e in italiano corrente.

- ii) Siano dati gli insiemi

$$A = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq \frac{3x}{x^2 + 2} \leq 1\} \quad B = \{x \in \mathbb{R} : x|x| - 4 \leq 0\}.$$

- a) Determinateli e rappresentateli sulla retta reale.
b) Determinate gli insiemi $A \cap B$ e $A \setminus B$.
c) Rappresentate graficamente l'insieme $A \times B$.

- 2) i) Rappresentate graficamente l'insieme A delle coppie $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ soddisfacenti il seguente sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} y > x^2 - 3x \\ y \geq 2x - 4 \\ x^2 + 4y^2 - 2x - 16y + 16 \geq 0. \end{cases}$$

- ii) Scrivete l'equazione delle rette orizzontali che non intersecano mai l'insieme A .
iii) Sia $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 2x - 4, y \geq x^2 - 3x\}$. Determinate l'area di E .

3) Siano $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ le funzioni definite da

$$f(x) = \begin{cases} e^x - 1 & \text{se } x < 0 \\ (x-1)^3 + 1 & \text{se } 0 \leq x < 2 \\ \frac{1}{4}x + \frac{3}{2} & \text{se } x \geq 2, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} |x| - 1 & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ -\frac{1}{x^2} + 1 & \text{se } x < -1 \text{ o } x > 1. \end{cases}$$

- i) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano f e g .
 - ii) Determinate l'immagine di f . Dite se f è limitata.
 - iii) Rappresentate la funzione inversa $f^{-1} : f(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ (motivando l'esistenza di f^{-1}).
 - iv) Determinate, se esistono, il minimo e/o il massimo (risp. i punti di minimo e/o di massimo) di g su $[-1, 3]$.
 - v) Calcolate $(f+g)(1)$, $(fg)(2)$, $(f \circ g)(0)$ e $(g \circ f)(0)$.
-

4) i) Calcolate

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2 + |x|}; \quad \int_1^e 2 \frac{(\log x)^3}{x} dx; \quad \int_{-2}^3 (|x-1| - 2) dx.$$

ii) Siano $f, g : [-1, 8] \rightarrow \mathbb{R}$ le funzioni definite da $f(x) = -\sqrt[3]{x}$ e $g(x) = \sqrt{x+1} + 1$. Rappresentate graficamente f e g . Determinate l'area della regione piana delimitata dai grafici di f e di g e dalla retta di equazione $x = 8$.

iii) Scrivete, usando il simbolo di sommatoria, la seguente espressione, dove x è una costante positiva fissata:

$$\frac{2}{x^4 + 3} - \frac{4}{x^7 + 3} + \frac{8}{x^{10} + 3} - \cdots - \frac{256}{x^{25} + 3}.$$

5) i) Studiate (insieme di definizione, segno, comportamento agli estremi dell'insieme di definizione, continuità, derivabilità, punti critici e monotonia, convessità/concavità) la funzione definita da

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)^3 e^x}.$$

ii) Determinate l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $(0, 1)$ e rappresentatela insieme alla funzione f .

iii) Calcolate $\int_2^4 \frac{1}{f(x)e^x} dx$.

6) Rappresentate graficamente una funzione continua $f : [-1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ soddisfacente le seguenti proprietà:

- i) $f(-1) = 3$ ed f non è decrescente su $[-1, 4]$;
 - ii) la funzione integrale $F(x)$ di $f(x)$ definita da $F(x) = \int_{-1}^x f(t) dt$ su $[-1, 4]$ è positiva su $[-1, 4]$; inoltre $F(x)$ è crescente su $[-1, 3]$ e decrescente su $[3, 4]$.
-