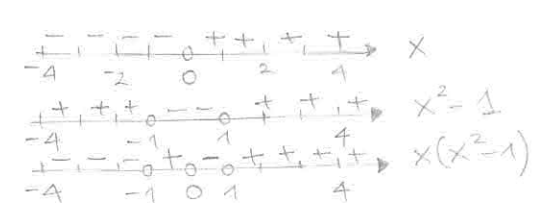


Università degli Studi di Trento - Facoltà di Scienze Cognitive
 CdL in Scienze e Tecniche di Psicologia Cognitiva
 CdL in Interfacce e Tecnologie della Comunicazione - CdL in Filosofia
 ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA (CON ELEMENTI DI ALGEBRA)
 a.a. 2011-2012 - Rovereto, 16 luglio 2012

FILA (A) 1) i) $A = \text{"Mario Rossi è iscritto alla Facoltà di Scienze Cognitive"}$
 $B = \text{"Mario Rossi ha superato l'esame di AM."}$
 Allora la proposizione data si scrive nella forma " $A \wedge B$." Si ottiene
 $\text{non}(A \wedge B) \Leftrightarrow (\text{non} A) \vee (\text{non} B)$. La negazione della proposizione
 data si scrive quindi come segue:
 "Mario Rossi non è iscritto alla Facoltà di Scienze Cognitive o
 non ha superato l'esame di AM." □

ii) a) $A = \{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{x^3 - x} < 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x^3 - x < 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x(x^2 - 1) < 0\}$
 $= \underline{\underline{]- \infty, -1[\cup]0, 1[}}.$



$B = \{x \in \mathbb{R} : |x - 1| \leq 6\}$
 $= \underline{\underline{]- \infty, +3]}}.$

$$\begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ x(x - 1) - 6 \leq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x - 1 < 0 \\ -x(x - 1) - 6 \leq 0 \end{cases}$$

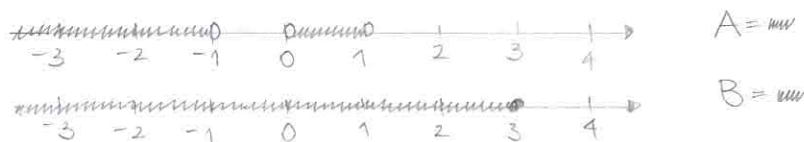
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - x - 6 \leq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x < 1 \\ -x^2 + x - 6 \leq 0 \end{cases}$$

Poiché $x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow$
 $x_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} \Rightarrow$
 $x_1 = 3, x_2 = -2$

$-x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow$
 $x_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 24}}{-2}$ impossibile

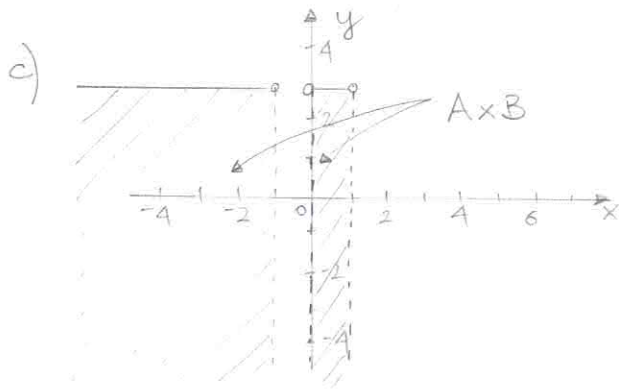
i sistemi sopra sono equivalenti a

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ -2 \leq x \leq 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x < 1 \\ \mathbb{R} \end{cases}$$



b) $\underline{\underline{A \cup B = B =] - \infty, +3]}}$; $\underline{\underline{A \cap B = A =] - \infty, -1[\cup]0, 1[}}.$

Solo $A \cup B$ è un intervallo; $A \cup B$ e $A \cap B$ sono limitati superiormente,
 ma non inferiormente. □



2) i) $3^{x^2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2x} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow 3^{x^2-2x} \geq 3^0 \Leftrightarrow x^2-2x \geq 0 \Leftrightarrow x(x-2) \geq 0$
 $\Rightarrow S =]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[$.

$\log(x-1) + \log(2x+1) \leq \frac{1}{2} \log 4 \Leftrightarrow \log(x-1) + \log(2x+1) \leq \log 4^{\frac{1}{2}}$

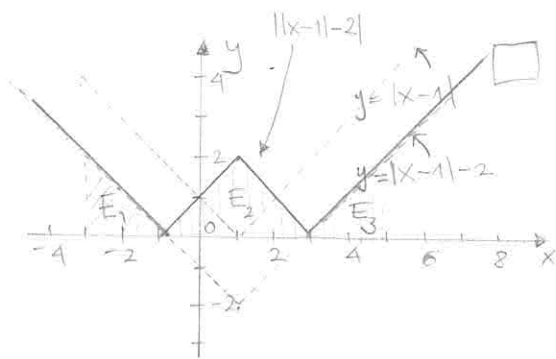
$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1 > 0 \\ 2x+1 > 0 \\ \log(x-1)(2x+1) \leq \log 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x > -\frac{1}{2} \\ (x-1)(2x+1) \leq 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ 2x^2 - x - 3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ -1 \leq x \leq \frac{3}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow S =]1, \frac{3}{2}]$.

$2x^2 - x - 3 = 0$
 $\Leftrightarrow x_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{4}$
 $= \frac{1 \pm 5}{4}$
 $= \frac{3}{2} \text{ or } -1$

ii) $\int_{-3}^5 ||x-1|-2| dx = \text{area } E_1 + \text{area } E_2 + \text{area } E_3$
 $= 8$.



$\int_{-2}^2 f(x) dx = 0$ poiché $f(x)$ è dispari in $[-2, 2]$, ossia

$\forall x \in [-2, 2] \text{ mi ha } f(x) = -f(-x)$.

iii) $\begin{cases} x^2 + 2x + y^2 - 4y + 4 = 0 \\ y = |x+1| + 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2 + (y-2)^2 = 1 \\ y = |x+1| + 1 \end{cases}$

$S_1 = (-1, 1)$

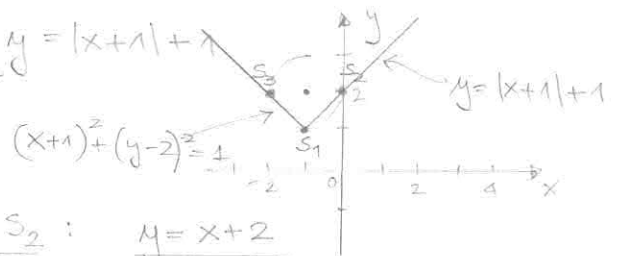
$S_2 = (0, 2)$

$S_3 = (-2, 2)$

eq. retta pass. per S_1 e S_2 : $y = x + 2$

eq. retta pass. per S_2 e S_3 : $y = 2$

eq. retta pass. per S_1 e S_3 : $y = -x$.



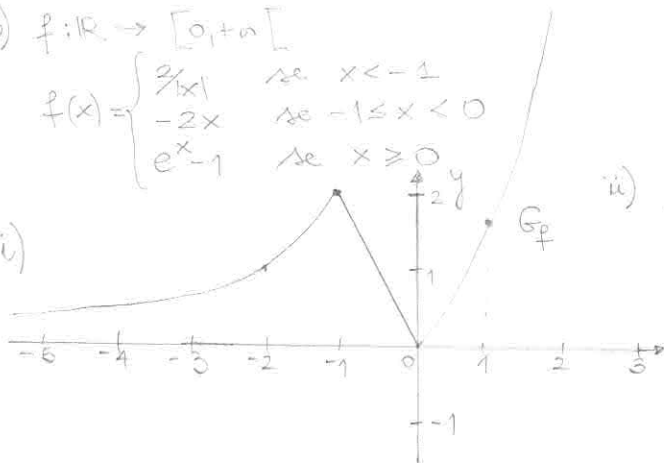
(*) Si possono anche trovare S_1, S_2, S_3 risolvendo (vedi FILA B, Es. 3 iii)

$\begin{cases} (x+1)^2 + (y-2)^2 = 1 \\ y = x + 2 \\ x \geq -1 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} (x+1)^2 + (y-2)^2 = 1 \\ y = -x \\ x < -1 \end{cases}$

3) $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty[$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{|x|} & \text{se } x < -1 \\ -2x & \text{se } -1 \leq x < 0 \\ e^x - 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

i)



ii) $\max_{[-\infty, 1]} f = 2$ massimo (e massimo locale)
 $x = -1$ è pt. di massimo (loc.)

$M = e - 1$ è un massimo loc., e
 $x = 1$ è pt. di massimo loc
 in $]-\infty, 1]$.

$\min_{[-\infty, 1]} f = 0$ minimo (e mini. loc.)
 $x = 0$ è pt. di minimo (loc.)

iii) $f(\mathbb{R}) = [0, +\infty[$ e quindi f è suriettiva. $\square$

iv) $\int_{-3}^2 f(x) dx = \int_{-3}^{-1} \frac{2}{|x|} dx + \int_{-1}^0 (-2x) dx + \int_0^2 (e^x - 1) dx =$
 $= -\int_{-3}^{-1} \frac{2}{x} dx - 2 \int_{-1}^0 x dx + \int_0^2 (e^x - 1) dx = -2 \left[\log|x| \right]_{-3}^{-1} - \left[x^2 \right]_{-1}^0 + \left[e^x - x \right]_0^2$
 $= -2 \log 1 + 2 \log 3 + 1 + (e^2 - 2) - (1) = \underline{2 \log 3 + e^2 - 2}.$

4) $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x}$

• $\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{0\} =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

• segno di f

$$\begin{array}{c} \frac{+}{-4} \cdot \frac{+}{-2} = \frac{+}{0} \cdot \frac{+}{2} \cdot \frac{+}{4} \rightarrow x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1) \\ \frac{-}{-4} \cdot \frac{-}{-2} = \frac{-}{0} \cdot \frac{-}{2} \cdot \frac{-}{4} \rightarrow x \\ \frac{-}{-4} \cdot \frac{+}{-2} = \frac{+}{0} \cdot \frac{+}{2} \cdot \frac{+}{4} \rightarrow f(x) \end{array}$$

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ } $x = 0$ è asintoto verticale per f

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$;

Osserviamo che f ha anche un asintoto obliquo: $y = ax + b$ è dato da

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2} = 1 = a$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2 + 2x - 3}{x} - x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2x - 3}{x} \right] = 2 = b$

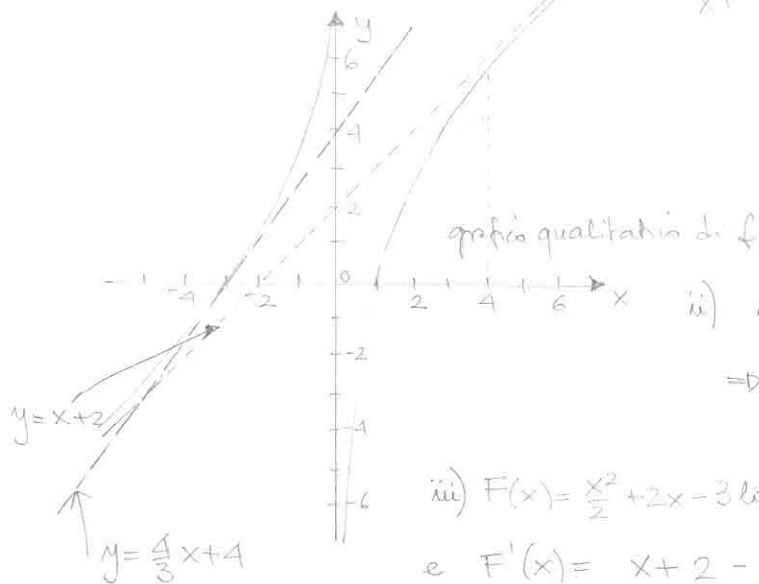
e quindi $y = x + 2$ è l'asintoto obliquo per f , per $x \rightarrow +\infty$
 per $x \rightarrow -\infty$.

• $\text{dom } f' = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $f'(x) = \frac{(2x+2)x - (x^2+x-3)}{x^2} = \frac{x^2+3}{x^2} > 0 \text{ su } \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\frac{+}{-2} \frac{+}{-1} \frac{+}{0} \frac{+}{1} \frac{+}{2} \rightarrow f'(x)$
 $\uparrow \quad \quad \quad \uparrow$
 $f(x)$

• $\text{dom } f'' = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$f''(x) = \frac{2x \cdot x^2 - (x^2+3) \cdot 2x}{x^4} = \frac{-6x}{x^4} = \frac{-6}{x^3}$
 $\frac{+}{-2} \frac{+}{-1} \frac{+}{0} \frac{-}{1} \frac{-}{2} \rightarrow f''(x)$
 $\cup \quad \quad \quad \cup$
 $f(x)$



ii) $y = 0 + f'(-3)(x+3)$
 $\Rightarrow y = \frac{4}{3}(x+3), \text{ ossia } y = \frac{4}{3}x + 4$

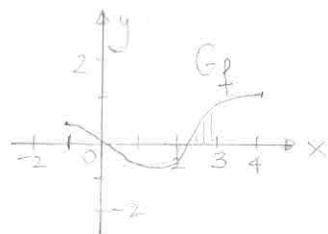
iii) $F(x) = \frac{x^2}{2} + 2x - 3 \log x$ è derivabile su $]0, +\infty[$
e $F'(x) = x + 2 - \frac{3}{x} = \frac{x^2 + 2x - 3}{x} = f(x) \text{ su } [1, 4]$

quindi F è una primitiva di f .

iv) $\text{area } E = \int_1^4 f(x) dx = [F(x)]_1^4 = (8 + 8 - 3 \log 4) - (\frac{1}{2} + 2) = 16 - \frac{5}{2} - 3 \log 4$
 $= \frac{27}{2} - 3 \log 4.$

5) a) (V): segue dal teorema di esistenza degli zeri, poiché $f(-1) \cdot f(2) < 0$
 $\Leftrightarrow f(-1)$ e $f(2)$ hanno segni discordi.

b) (F)



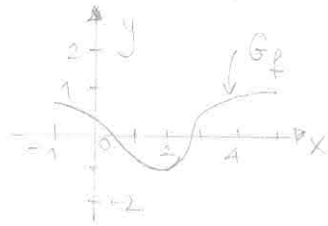
questa f ha $\int_2^3 f(x) dx > 0$, ma

$f(x)$ non è positiva in ogni $x \in [2, 3]$.

6) $P_6^{2,1,1,1,1,1} (= P_6^2) = \frac{6!}{2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2} = 360$

FILA 3) 1) a) (V): segue dal teorema di esistenza degli zeri, poiché $f(-1) \cdot f(2) < 0$
 $\Leftrightarrow f(-1)$ e $f(2)$ hanno segni discordi, $\square$

b) (F)



questa f ha $\int_{-1}^3 f(x) dx < 0$, ma
 $f(x)$ non è negativa su ogni $x \in [-1, 3]$. $\square$

2) $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty[$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^2} & \text{se } x \leq -1 \\ -2x & \text{se } -1 < x < 0 \\ 3^x - 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases} \quad \text{i)}$$



ii) $\max_{[-1, 1]} f = 2$ massimo (e massimo locale)
 $x = -1, x = 1$ sono pt. di massimo (loc.)

$\min_{[-1, 1]} f = 0$ minimo (e minimo locale)
 $x = 0$ è pt. di minimo (loc.). $\square$

iii) $f(\mathbb{R}) = [0, +\infty[$ e quindi f è suriettiva. $\square$

$$\begin{aligned} \text{iv) } \int_{-3}^2 f(x) dx &= \int_{-3}^{-1} \frac{2}{x^2} dx + \int_{-1}^0 (-2x) dx + \int_0^2 (3^x - 1) dx = \\ &= \left[-\frac{2}{x} \right]_{-3}^{-1} - \left[x^2 \right]_{-1}^0 + \left[\frac{3^x}{\log 3} - x \right]_0^2 = \\ &= \left(2 - \frac{2}{3} \right) + 1 + \frac{9}{\log 3} - 2 - \frac{1}{\log 3} = \frac{4}{3} + \frac{8}{\log 3} \end{aligned} \quad \square$$

$$\begin{aligned} 3) \text{ i) } 3^{x^2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2x} - 1 \leq 0 &\Leftrightarrow 3^{x^2} \cdot 3^{-2x} \leq 3^0 \Leftrightarrow x^2 - 2x \leq 0 \\ &\Rightarrow \underline{\underline{S = [0, 2]}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log(x-1) + \log(2x+1) &> \frac{1}{2} \log 4 \Leftrightarrow \log(x-1) + \log(2x+1) > \log 4^{1/2} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x-1 > 0 \\ 2x+1 > 0 \\ \log(x-1)(2x+1) > \log 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x > -\frac{1}{2} \\ (x-1)(2x+1) > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\begin{cases} x > 1 \\ 2x^2 - x - 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < -1 \text{ o } x > \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{S =]\frac{3}{2}, +\infty[}}. \end{aligned} \quad \square$$

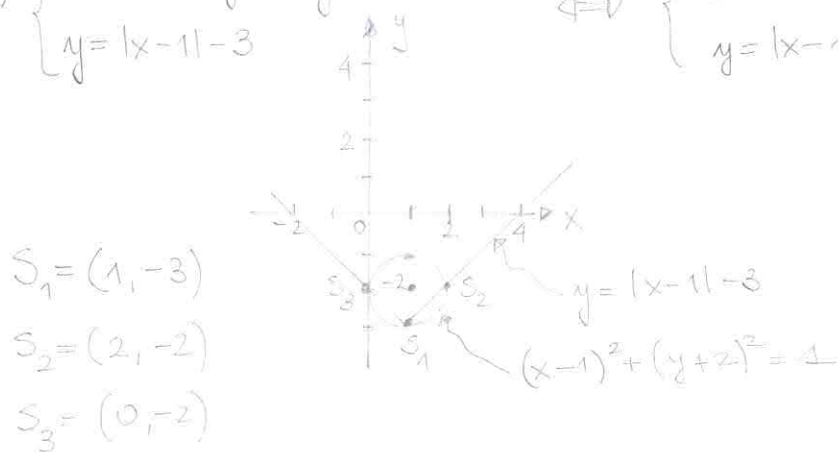
ii) $\int_{-4}^5 ||x+1|-3| dx$

$= \text{area } E_1 + \text{area } E_2$

$= 9 + \frac{9}{2} = \frac{27}{2}$

$\int_{-2}^2 f(x) dx = 0$ poiché $f(x)$ è dispari su $[-2, 2]$, ossia $\forall x \in [-2, 2]$ si ha $f(x) = -f(-x)$. $\square$

iii) $\begin{cases} x^2 - 2x + y^2 + 4y + 4 = 0 \\ y = |x-1| - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y+2)^2 = 1 \\ y = |x-1| - 3 \end{cases}$



eq. retta passante per S_1 e S_2 : $y = x - 4$

eq. retta passante per S_2 e S_3 : $y = -2$

eq. retta passante per S_1 e S_3 : $y = -x - 2$

* Si possono anche trovare S_1, S_2, S_3 risolvendo $\begin{cases} (x-1)^2 + (y+2)^2 = 1 \\ y = |x-1| - 3 \end{cases}$

$\textcircled{I} \begin{cases} (x-1)^2 + (y+2)^2 = 1 \\ y = x - 4 \\ x \geq 1 \end{cases}$ $\textcircled{II} \begin{cases} (x-1)^2 + (y+2)^2 = 1 \\ y = -x - 2 \\ x < 1 \end{cases}$

Infatti $\textcircled{I} \begin{cases} (x-1)^2 + (y+2)^2 = 1 \\ y = x - 4 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (x-2)^2 = 1 \\ y = x - 4 \\ x \geq 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 + x^2 - 4x + 4 = 1 \\ y = x - 4 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 6x + 4 = 0 \\ y = x - 4 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1, x_2 = 2 \\ y = x - 4 \\ x \geq 1 \end{cases}$

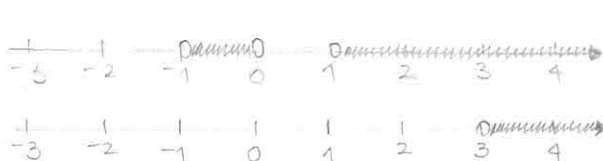
$\Rightarrow S_1 = (1, -3) \quad S_2 = (2, -2)$

Procedendo analogamente con $\textcircled{II}$ si ottiene S_3 .

- 4) i) $A = \text{"Mario Rossi \u00e9 iscritto alla Facolt\u00e0 di Scienze Cognitive"}$
 $B = \text{"Mario Rossi non ha superato l'esame di Psicologia Generale."}$
 Allora la proposizione data si scrive nella forma " A e B ." Si ottiene
 $\text{non}(A \text{ e } B) \Leftrightarrow (\text{non } A) \vee (\text{non } B)$. La negazione della proposizione
 data si scrive quindi come segue:
 "Mario Rossi non \u00e9 iscritto alla Facolt\u00e0 di Scienze Cognitive o
 ha superato l'esame di Psicologia Generale." $\square$

ii) a) $A = \{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{x^3 - x} > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x^3 - x > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x(x^2 - 1) > 0\}$
 $=]-1, 0[\cup]1, +\infty[$
 vedi FILA (A)
 Es. 1) ii) a)

$B = \{x \in \mathbb{R} : |x - 1| x > 6\} =]3, +\infty[$.
 vedi FILA (A)
 Es. 1) ii) a)

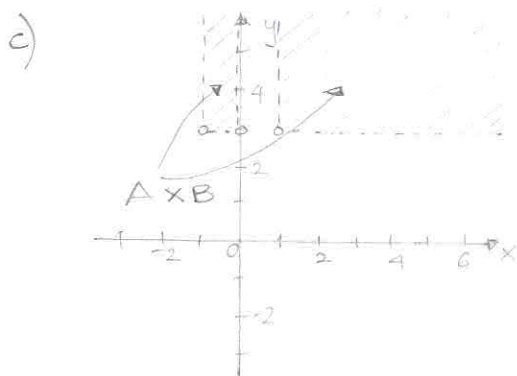


$A = \text{mis}$

$B = \text{mis}$

b) $A \cup B = A =]-1, 0[\cup]1, +\infty[$; $A \cap B = B =]3, +\infty[$.

Solo $A \cap B$ \u00e9 un intervallo; $A \cup B$ e $A \cap B$ sono limitati inferiormente,
 ma non superiormente. $\square$



5) $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x}$ • $\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{0\} =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

• segno di f

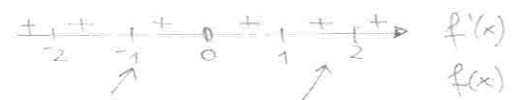
• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$

$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} \begin{array}{l} x=0 \text{ \u00e9 asintoto verticale per } f. \\ \text{Risulta (vedi FILA (A), Es. 4) che anche questa } f \text{ ha} \\ \text{un asintoto obliquo: esso ha eq. } y = x - 2 \\ \text{(per } x \rightarrow +\infty \text{ e per } x \rightarrow -\infty \text{).} \end{array}$

• $\text{dom } f' = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $f'(x) = \frac{(2x-2)x - (x^2-2x-3)}{x^2} = \frac{x^2+3}{x^2} > 0$ su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$



• $\text{dom } f'' = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$f''(x) = \frac{2x(x^2) - (x^2+3) \cdot 2x}{x^4} = \frac{-6x}{x^4} = -\frac{6}{x^3}$$

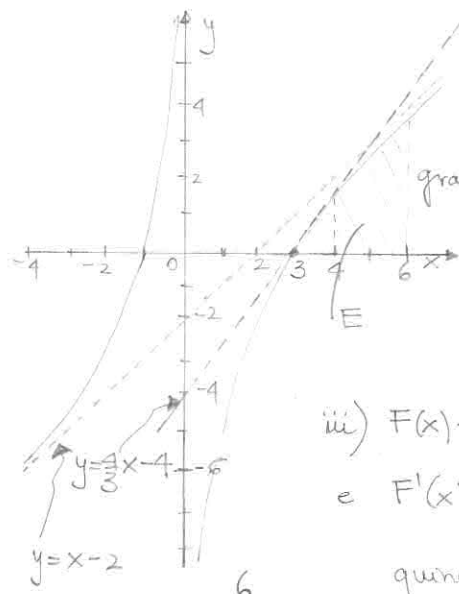
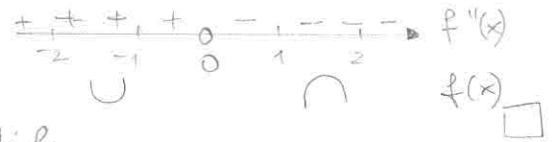


grafico qualitativo di f

ii) $y = 0 + f'(3)(x-3)$

$\Rightarrow y = \frac{4}{3}(x-3)$, ossia $y = \frac{4}{3}x - 4$.

iii) $F(x) = \frac{x^2}{2} - 2x - 3 \log x$ è derivabile su $]0, +\infty[$

e $F'(x) = x - 2 - \frac{3}{x} = \frac{x^2 - 2x - 3}{x} = f(x)$ su $[4, 6]$,

quindi F è una primitiva di f .

iv) area $E = \int_4^6 f(x) dx = [F(x)]_4^6 = (18 - 12 - 3 \log 6) - (2 - 2 - 3 \log 4) =$
 $= 6 + 3 \log \frac{4}{6} = \underline{\underline{6 + 3 \log \frac{2}{3}}}$

6) $P_5^{2,1,1,1} (= P_5^2) = \frac{5!}{2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2} = \underline{\underline{60}}$