

Università degli Studi di Trento - Facoltà di Scienze Cognitive
 CdL in Scienze e Tecniche di Psicologia Cognitiva
 CdL in Interfacce e Tecnologie della Comunicazione - CdL in Filosofia
 Verifica settimanale di ANALISI MATEMATICA (CON ELEMENTI DI ALGEBRA)
 a.a. 2011-2012 — Rovereto, 21-25 novembre 2011

1) a) $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x^3 - 1) = \underline{\underline{0}}$; $\lim_{x \rightarrow 8^-} (2\sqrt[3]{x} + \log_2 x) = 2\sqrt[3]{8} + \log_2 8 = 4 + 3 = \underline{\underline{7}}$.

$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 14}{x} = \frac{4 - 14}{2} = \underline{\underline{-5}}$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x^4 - 1} = \underline{\underline{-\infty}}$; □
 infinitesimo negativo

b) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x^4 - 1} = \underline{\underline{+\infty}}$; $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{x^3 + 1} = \underline{\underline{-\infty}}$;
 infinitesimo positivo infinitesimo negativo

$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{x^3 + 1} = \underline{\underline{+\infty}}$; $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2^x + x}{x} = \underline{\underline{-\infty}}$; □

c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - 2^{x+1}}{x} = \underline{\underline{-\infty}}$; $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - 2^{x+1}}{x} = \underline{\underline{-\infty}}$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{(x-1)^3} = \underline{\underline{+\infty}}$;

$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{(x-1)^3} = \underline{\underline{-\infty}}$; □

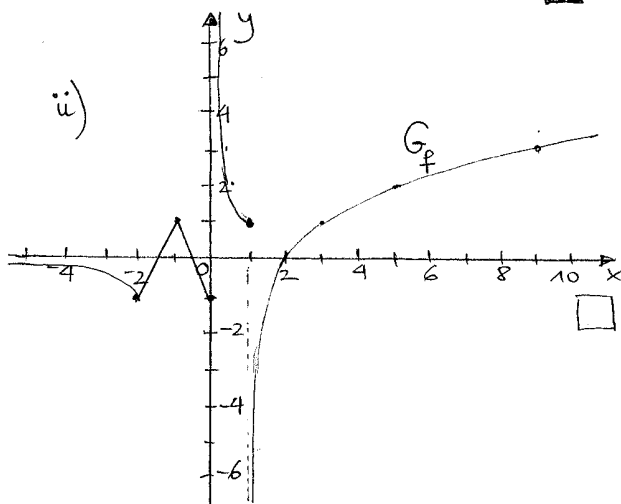
d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{-2} + 4}{3^{-x} + 2} = \frac{4}{2} = \underline{\underline{2}}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x}{1 - 3^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{3^x}}{\cancel{3^x}(\frac{1}{3^x} - 1)} = \underline{\underline{-1}}$;

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + x^4}{2x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4(\frac{1}{x^4} + 1)}{2x^3} = \underline{\underline{-\infty}}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x} + 1}{1 + x} = \underline{\underline{0}}$. □

2) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{(x+1)^2} & \text{se } x \leq -2 \\ -2|x+1| + 1 & \text{se } -2 < x \leq 0 \\ \frac{1}{x} & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ \log_2(x-1) & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

ii)



i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{(x+1)^2} = \underline{\underline{0}}$;

$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{-1}{(x+1)^2} = \underline{\underline{-1}} = f(-2)$;

$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} [-2|x+1| + 1] = \underline{\underline{-1}}$;

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} [-2|x+1| + 1] = \underline{\underline{-1}} = f(0)$;

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \underline{+\infty};$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x} = \underline{1} = f(1); \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \log_2(x-1) = \underline{-\infty};$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_2(x-1) = \underline{+\infty}. \quad \square$$

iii) f è una funzione definita a tratti mediante funzioni continue. Basta controllare la continuità nei pt. $x = -2$, $x = 0$, $x = 1$.

Poiché $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = f(-2) = -1$, si ha che f è continua in $x = -2$.

Poiché $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, f non è continua in $x = 0$, e

poiché $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$, f non è continua in $x = 1$. $\square$

iv) $y = 0$ è asintoto orizzontale per f , per $x \rightarrow -\infty$;

$x = 0$, $x = 1$ sono asintoti verticali per f . $\blacksquare$

$$3) i) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 2^x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(1 - \frac{2^x}{x})}{-x} = \underline{-1};$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x + x^3}{x^2 + e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x(1 + x^3/2^x)}{e^x(x^2/e^x + 1)} = \underline{0}; \quad \uparrow_{2 < e}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{3x} - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{3x} - 1}{3x} \cdot \frac{3}{2} = \underline{\frac{3}{2}};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{2x} - 1}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{2x} - 1}{2x} \cdot \frac{2}{3} = \underline{\frac{2}{3}}; \quad \square$$

$$ii) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5^x - x}{\log_3 x - 3 \cdot 5^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5^x(1 - x/5^x)}{5^x(\log_3 x / 5^x - 3)} = \underline{-\frac{1}{3}};$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(1 + x^{100})}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(x^{100}(1/x^{100} + 1))}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\log x^{100}}{x} + \frac{\log(1/x^{100} + 1)}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{100 \log x}{x} + \frac{\log(1/x^{100} + 1)}{x} \right] = \underline{0};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + 3x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + 3x)}{3x} \cdot \frac{3}{2} = \underline{\frac{3}{2}};$$

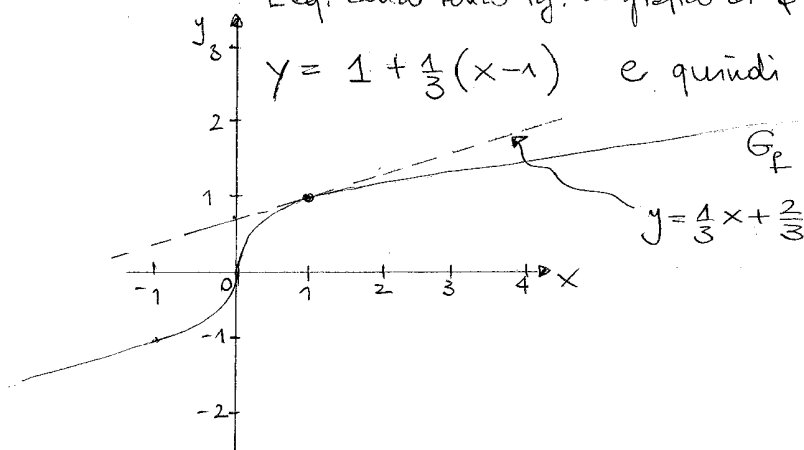
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5}{5^{-x} + x^5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5}{x^5 [5^{-x}/x^5 + 1]} = \underline{1}. \quad \blacksquare$$

4) a) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}$ $f'(1) = \frac{1}{3}$

L'eq. della retta tg. al grafico di f nel pr. $(x_0, f(x_0)) = (1, 1)$ è

$y = 1 + \frac{1}{3}(x-1)$ e quindi $y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$.



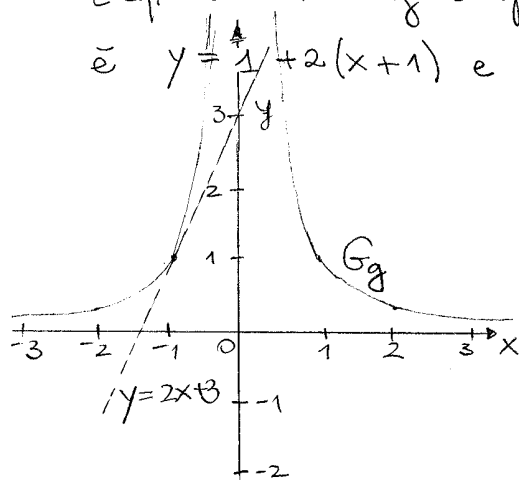
b) $g(x) = \frac{1}{x^2}$

$g'(x) = -\frac{2}{x^3}$

$g'(1) = -2$

L'eq. della retta tg. al grafico di g nel pr. $(x_0, g(x_0)) = (-1, 1)$

è $y = \frac{1}{-1} + 2(x+1)$ e quindi $y = 2x + 3$.



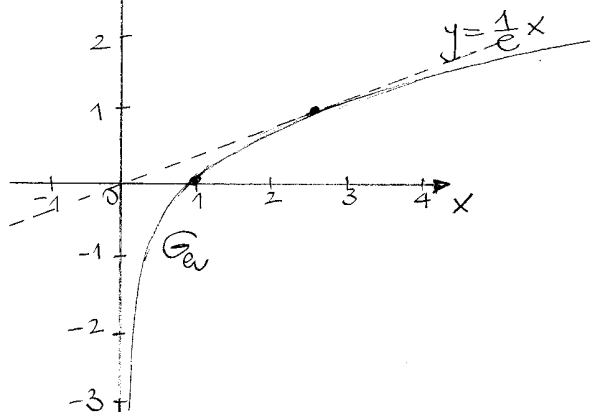
c) $h(x) = \log x$

$h'(x) = \frac{1}{x}$

$h'(e) = \frac{1}{e}$

L'eq. della retta tg. al grafico di h nel pr. $(x_0, h(x_0)) = (e, 1)$

è $y = 1 + \frac{1}{e}(x-e)$ e quindi $y = \frac{1}{e}x$.



$$5) i) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 ; \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 1 ;$$

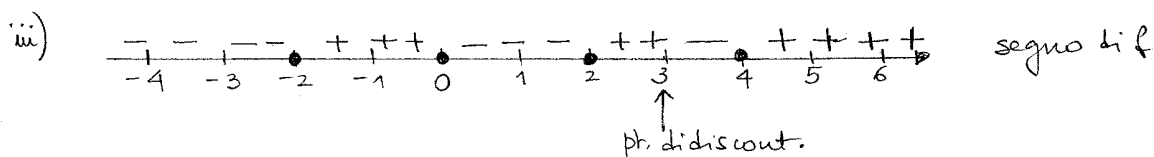
$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 2 ; \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -3 ;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty ;$$

□

ii) Poiché $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty \neq \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 1 = f(-1)$, $x = -1$ è un pt. di discontin. di f .
 $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 2 = f(3) \neq \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -3$, $x = 3$ è un pt. di discontin. di f .

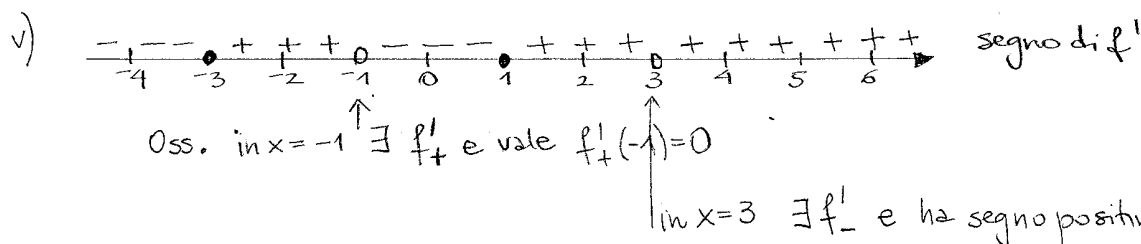
□



□

iv) $y = 0$ asintoto orizzontale per f , per $x \rightarrow -\infty$;
 $y = x - 3$ asintoto obliquo per f , per $x \rightarrow +\infty$;
 $x = -1$ asintoto verticale per f .

□



□

6) a) $(4x^3 - x^{-2})' = 12x^2 + 2x^{-3} = 12x^2 + \frac{2}{x^3}.$

$$\left(\frac{1+x^3}{x}\right)' = (x^{-1} + x^2)' = -x^{-2} + 2x = -\frac{1}{x^2} + 2x.$$

$$\left(\frac{e^x + 1}{4 - x^2}\right)' = \frac{e^x(4 - x^2) - (e^x + 1)(-2x)}{(4 - x^2)^2} = \frac{e^x(4 - x^2) + (e^x + 1)(2x)}{(4 - x^2)^2}.$$

$$(2\sqrt{x} + \log x)' = \left(2 \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x}.$$

b) $(2^x (\sqrt[3]{x} + x))' = 2^x \log 2 (\sqrt[3]{x} + x) + 2^x \left(\frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} + 1\right).$

$$[(x^2 + 1)(\log_3 x + x)]' = 2x(\log_3 x + x) + (x^2 + 1)\left(\frac{1}{x \log 3} + 1\right).$$

$$\left(\frac{x^2 + 3x}{e^x + 1}\right)' = \frac{(2x + 3)(e^x + 1) - (x^2 + 3x)e^x}{(e^x + 1)^2}.$$

$$\left[\left(x^{-1} + \frac{1}{e^x}\right) \log x\right]' = \left(-x^{-2} - \frac{1}{e^x}\right) \log x + \left(x^{-1} + \frac{1}{e^x}\right) \cdot \frac{1}{x}.$$

□