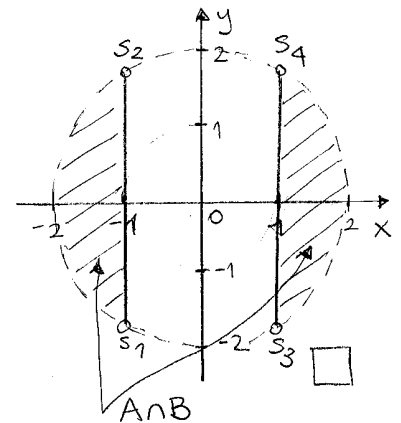
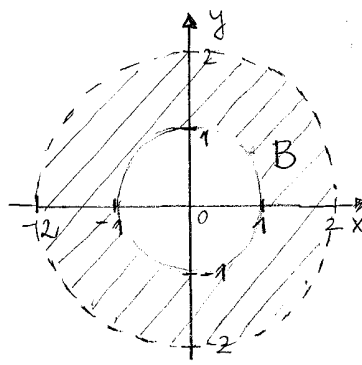
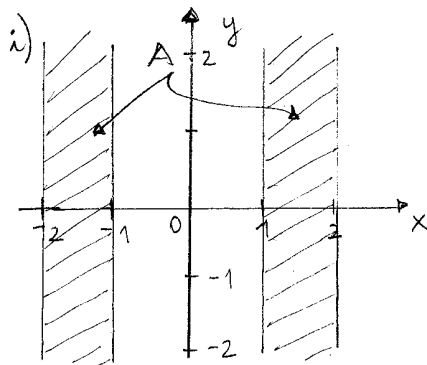


Università degli Studi di Trento - Facoltà di Scienze Cognitive
 CdL in Scienze e Tecniche di Psicologia Cognitiva
 CdL in Interfacce e Tecnologie della Comunicazione - CdL in Filosofia
 ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA (CONCENENTI DI ALGEBRA)
 a.a. 2011-2012 - Rovereto, 14 settembre 2012

FILA (A)

1) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq |x| \leq 2\}$

$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 < 4\}$



$1 \leq |x| \leq 2 \Leftrightarrow$

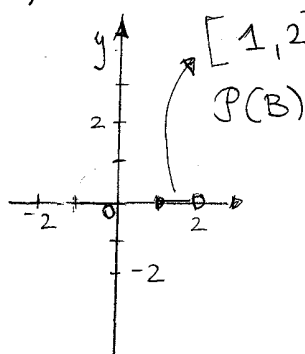
$x \in [-2, -1] \cup [1, 2]$

ii) Osserviamo che i pt. di intersezione della retta $x = -1$ con la circonferenza $x^2 + y^2 = 4$ soddisfanno l'eq. $1 + y^2 = 4$, ossia $y = \pm\sqrt{3}$; analog. per $x = 1$. Quindi $S_1 = (-1, -\sqrt{3})$ e $S_2 = (-1, \sqrt{3})$ sono i pt. di intersezione della retta $x = -1$ con la circonferenza $x^2 + y^2 = 4$ e $S_3 = (1, -\sqrt{3})$ e $S_4 = (1, \sqrt{3})$ sono i pt. di intersezione della retta $x = 1$ con la circonferenza di eq. $x^2 + y^2 = 4$. Ne segue che le rette orizzontali di eq. $y = k$ con $k \leq -\sqrt{3}$ o $k \geq \sqrt{3}$ non intersecano mai l'insieme $A \cap B$. $\square$

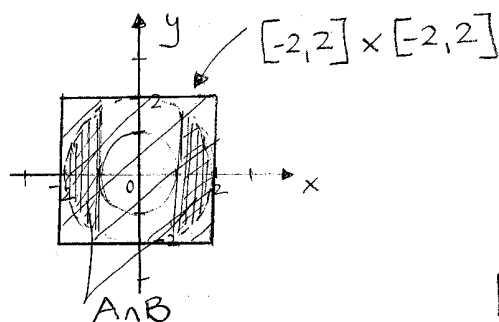
iii) (F) Il pt. $(-1, 0)$ sta sulla retta di eq. $y = x + 1$ e $(-1, 0) \in A \cap B$.

(F) $y = -x^2 - 2$ ha il vertice in $(0, -2)$, che è anche il suo punto di massimo; non esiste quindi un punto di intersezione tra B e la parabola.

c) (V) essendo $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x < 2, y=0\}$ il segmento



d) (V)



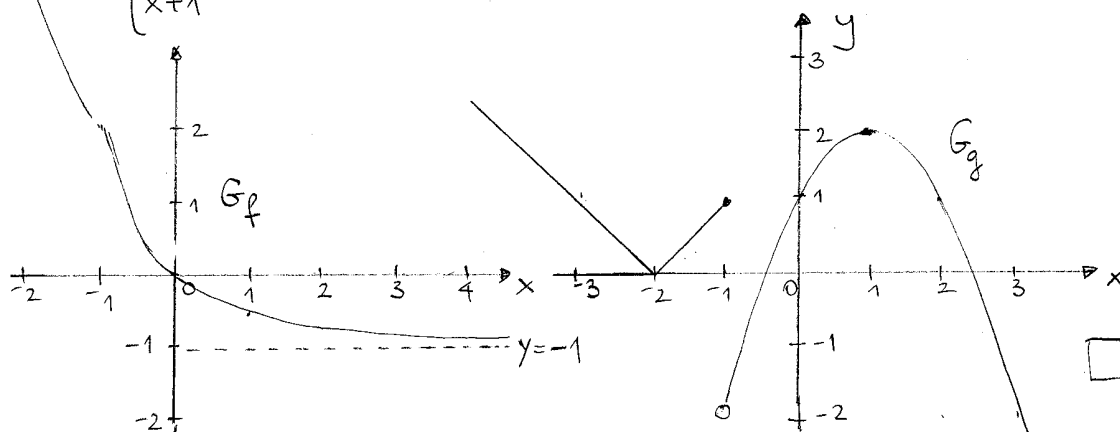
2) $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, +\infty[$

$$f(x) = \begin{cases} 2^{-x} & \text{se } x < -1 \\ 2x^2 & \text{se } -1 \leq x \leq 0 \\ \frac{1}{x+1} - 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$g(x) = \begin{cases} |x+2| & \text{se } x \leq -1 \\ -(x-1)^2 + 2 & \text{se } x > -1 \end{cases}$$

i)



ii) $f(\mathbb{R}) =]-1, +\infty[\subsetneq [1, +\infty[$, e quindi f non è suriettiva. $\square$

iii) $(f \circ g)(-1) \stackrel{!}{=} f(g(-1)) = f(1) = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}}$;

$$g(-1) = 1 \in \text{dom } f$$

$$(f+g)(-1) = f(-1) + g(-1) = 2 + 1 = \underline{\underline{3}};$$

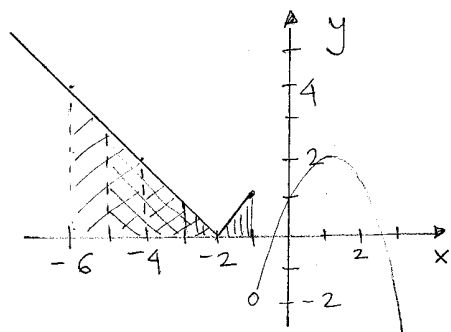
$f^{-1}(2) = x$ tale che $f(x) = 2$, ossia $x = -1$,
quindi $f^{-1}(2) = \underline{\underline{-1}}$. $\square$

iv) $g|_{]-\infty, -2]} \bar{e}$ decrescente; $g|_{[-2, -1]} \bar{e}$ crescente;

$g|_{[-1, 1]} \bar{e}$ crescente; $g|_{[1, +\infty[} \bar{e}$ decrescente. $\square$

v) Calculate

$$\sum_{k=1}^4 \int_{-2-k}^{-k} g(x) dx = \int_{-3}^{-1} g(x) dx + \int_{-4}^{-2} g(x) dx + \int_{-5}^{-3} g(x) dx + \int_{-6}^{-4} g(x) dx$$



$$= 1 + \frac{2 \cdot 2}{2} + \frac{1+3}{2} \cdot 2 + \frac{2+4}{2} \cdot 2$$

$$= 1 + 2 + 4 + 6 = \underline{13}.$$

3) i) segue di f' □

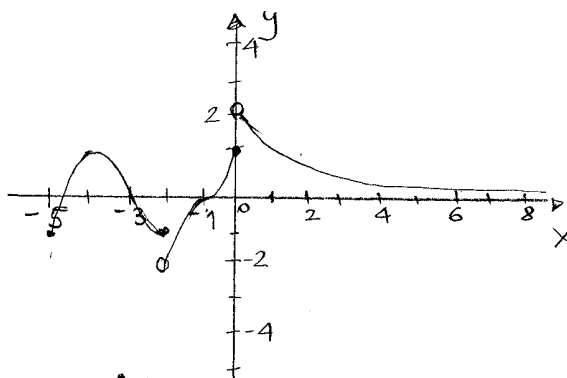
ii) $-2 \leq f(x) \leq 2 \quad \forall x \geq -4$, e quindi f è limitata.

$\min f = -1$ $x=1$ punto di minimo

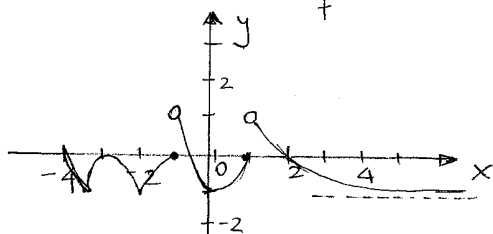
$[-1, 1]$

$\nexists \max f$
 $[-1, 1]$

iii) $x \mapsto -f(x+1)$
 $\cap$
 $[-5, +\infty[$



$x \mapsto |f(x)| - 1$
 $\cap$
 $[4, +\infty[$



4) i) $x^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ e $x^2 = 0 \Leftrightarrow x=0$; quindi

$x^2 + 1 \geq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ e $x^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow x=0$; quindi

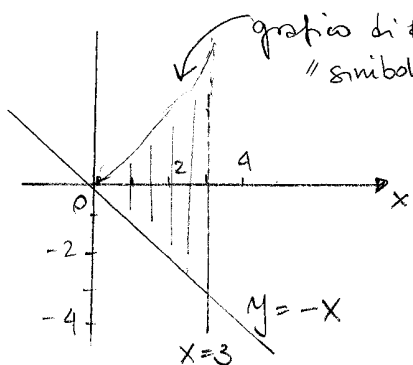
$\log(1+x^2) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ e $\log(1+x^2) = 0 \Leftrightarrow x=0$.

Si ha allora segno di $x \log(1+x^2)$ è nullo solo se $x=0$;
per $x > 0$ la funzione $x \log(1+x^2)$ è positivo, mentre è
negativo per $x < 0$.

ii) $F(x)$ è derivabile su $\mathbb{R}$ (composizione e prodotto di funzioni
derivabili su $\mathbb{R}$) e $\forall x \in \mathbb{R}$ si ha

$$F'(x) = x \log(1+x^2) + \frac{1+x^2}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2} \cdot 2x - x = x \log(1+x^2) = f(x).$$

iii) Essendo f positiva su $]0, +\infty[$ e $f(0)=0$, il grafico
di f si trova nel primo quadrante del piano cartesiano.



$$\begin{aligned} \text{area}(E) &= \int_0^3 [f(x) - (-x)] dx = \\ &= \int_0^3 f(x) dx + \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^3 = \\ &= F(3) - F(0) + \frac{9}{2} = \\ &= 5 \log 10 - \frac{9}{2} + \frac{9}{2} = \underline{\underline{5 \log 10}}. \end{aligned}$$

5) i) $f(x) = \log\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$ • $\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{0\} =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$
• poiché $\frac{1}{x^2} > 0 \quad \forall x \in \text{dom } f$, si ha
 $1 + \frac{1}{x^2} > 1 \quad \forall x \in \text{dom } f$ e quindi
 $\log\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) > 0 \quad \forall x \in \text{dom } f$.

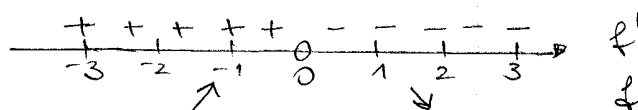
• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \log 1 = 0$ $y=0$ è un asintoto
orizzontale per f ,
per $x \rightarrow \left(\begin{smallmatrix} +\infty \\ -\infty \end{smallmatrix}\right)$.

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$ $x=0$ è asintoto verticale per f

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$

• $\text{dom } f' = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $f'(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} \cdot \frac{-2}{x^3} = \frac{-2}{x(1+x^2)}$.

Nono punti critici per f . Risulta



• $\text{dom } f'' = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $f''(x) = \frac{+2[(1+x^2) + 2x^2]}{x^2(1+x^2)^2} = \frac{+2[3x^2+1]}{x^2(1+x^2)^2}$

Essendo $f''(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, risulta che f è concava in $]-\infty, 0[$, ed è convessa in $]0, +\infty[$.

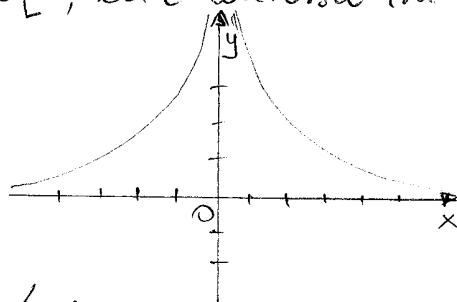


grafico qualitativo di f



ii) $y = \log 2 - \frac{2}{2}(x-1)$, ossia $y = -x + 1 + \log 2$. □

iii) $\int_1^2 x^2 f'(x) dx = \int_1^2 x^2 \frac{-2}{x(1+x^2)} dx = - \int_1^2 \frac{2x}{1+x^2} dx = - \log(1+x^2) \Big|_1^2$
 $= -\log 5 + \log 2 = \underline{\underline{\log \frac{2}{5}}}$. ■

6)i) $A = " \exists x \in \mathbb{Z} : \forall y \in \mathbb{R}, x < e^y "$. Questa proposizione è vera; basta prendere un qualsiasi numero intero negativo x e mi ha $x < e^y \quad \forall y \in \mathbb{R}$, poiché $e^y > 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}$.

non $A = " \forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{R} : x \geq e^y "$. □

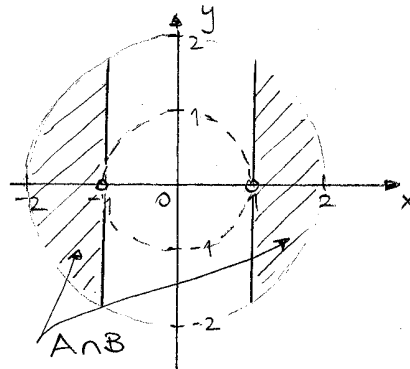
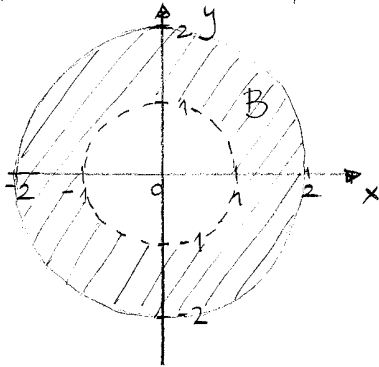
ii) $2^{-x^2|x|+1} < \log_2 4 \Leftrightarrow 2^{-x^2|x|+1} < 2^1 \Leftrightarrow$
 $-x^2|x|+1 < 1 \Leftrightarrow -x^2|x| < 0$ e questo è vero $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. ■

FILA (B)

1) i) vedi FILA (A), Es. 6) i).

$$\begin{aligned} \text{ii) } 2^{-x^2|x|+1} &\geq \log_2 4 &\Leftrightarrow & 2^{-x^2|x|+1} \geq 2 &\Leftrightarrow & -x^2|x|+1 \geq 1 \\ &&\Leftrightarrow & -x^2|x| \geq 0 &\Leftrightarrow & \underline{x=0} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

2) i) vedi FILA (A), Es. 1) i).



ii) $y=k$ con $k < -\sqrt{3}$ o $k > \sqrt{3}$ non intersecano mai $A \cap B$. $\square$

iii) (F) il punto $(-2, 0)$ sta sulla retta di eq. $y=x+2$ e $(-2, 0) \in A \cap B$.

(V) $y = -x^2 - 2$ ha il vertice in $(0, -2)$, che è anche il suo punto di massimo. Inoltre $(0, -2) \in B$.

(F) Il segmento $[1, 2] \times \{0\} \not\subset B$ poiché il punto $(1, 0) \notin B$, e quindi $[1, 2] \times \{0\} \notin \mathcal{P}(B)$.

(V) $A \cap B$ è contenuto nel quadrato $[-2, 2] \times [-2, 2]$. $\blacksquare$

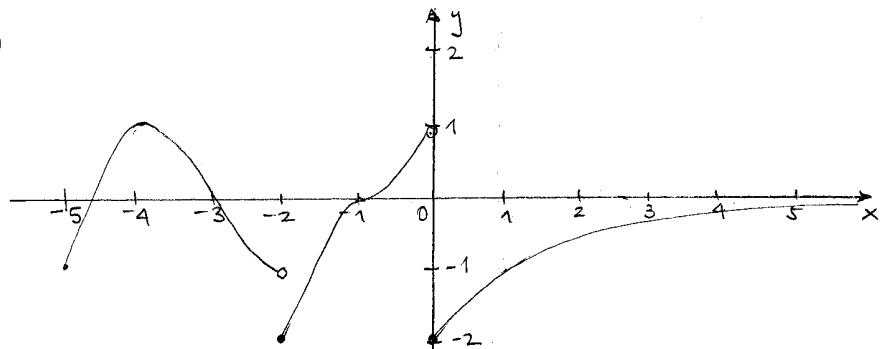
3) i) ~~A~~ segno di f' . $\square$

ii) $-1 \leq f(x) \leq 2 \quad \forall x \geq -4$, e quindi f è limitata.

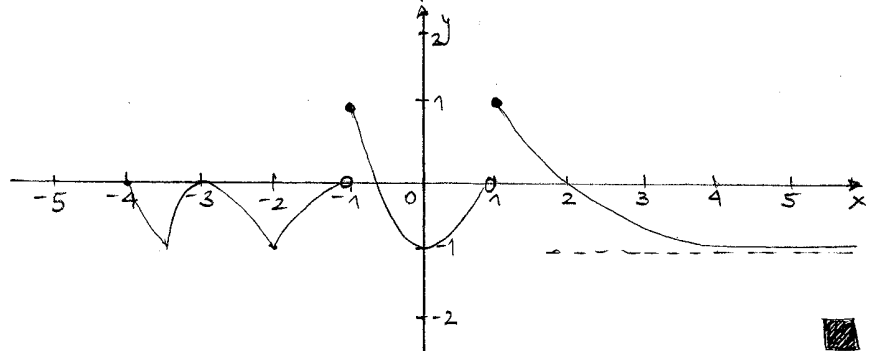
~~A~~ $\min_{[-1, 1]} f$;

$\max_{[-1, 1]} f = 2$ e $x = -1, x = 1$ sono punti di massimo. $\square$

iii) $x \mapsto -f(x+1)$
 $\uparrow$
 $[-5, +\infty[$



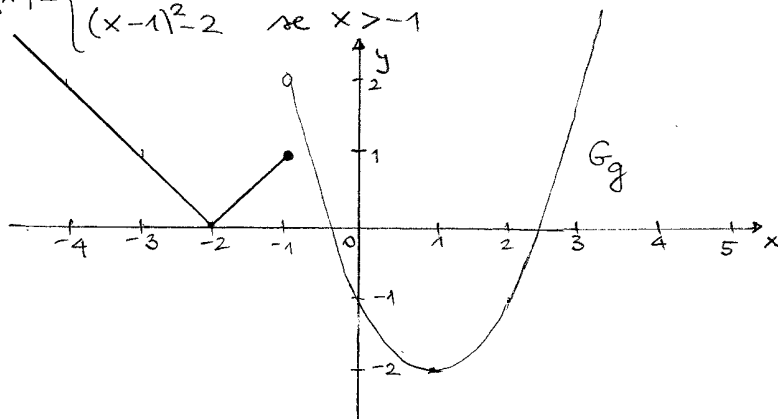
$x \mapsto |f(x)| - 1$
 $\uparrow$
 $[-4, +\infty[$



4) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$g(x) = \begin{cases} |x+2| & \text{se } x \leq -1 \\ (x-1)^2 - 2 & \text{se } x > -1 \end{cases}$$

i)



ii) Poiché $f(\mathbb{R}) =]-1, +\infty[$, risulta che f è suriettiva. □

iii) $(f \circ g)(-1) = f(g(-1)) = f(1) = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}}$;
 $\uparrow$
 $g(-1) = 1 \in \text{dom } f$

$$(f+g)(-1) = f(-1) + g(-1) = 2 + 1 = \underline{\underline{3}} ;$$

$$f^{-1}(2) = x : f(x) = 2, \text{ ossia } x = -1. \text{ Quindi } f^{-1}(2) = \underline{\underline{-1}}.$$

iv) $g|_{]-\infty, -2]}$ è decrescente, $g|_{[-2, -1]}$ è crescente, □

$g|_{]-1, 1]}$ è decrescente, $g|_{[1, +\infty[}$ è crescente. ▨

5) Vedi FILA (A), Es. 5

6) Vedi FILA (A), Es. 4. ▨