COGNOME ______________	NON SCRIVERE QUI	A
NOME ______________	1 2 3 4 5 6	
MATRICOLA _______		

UNIVERSITÀ DI TRENTO — FACOLTÀ DI SCIENZE COGNITIVE

CDL IN SCIENZE E TECNICHE DI PSICOLOGIA COGNITIVA
CDL IN INTERFACCE E TECNOLOGIE DELLA COMUNICAZIONE
CDL IN FILOSOFIA

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA (CON ELEMENTI DI ALGEBRA)

A.A. 2011-2012 — ROVERETO, 14 SETTEMBRE 2012

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **TRE ORE**.
Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.
È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.
Potete usare solo il vostro materiale di scrittura e il vostro materiale di studio. Non usate il colore rosso.

1) Siano A e B gli insiemi dati da

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le |x| \le 2\}, \qquad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2 + y^2 < 4\}.$$

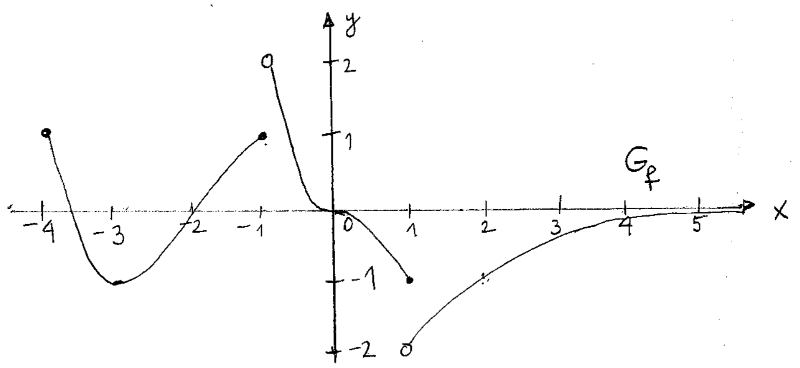
i) Disegnate nel piano cartesiano gli insiemi A, B e $A \cap B$.
ii) Determinate le equazioni delle rette orizzontali che non intersecano mai l'insieme $A \cap B$.
iii) Dite quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali sono false (giustificando le risposte, anche solo graficamente):
a) la retta di equazione $y = x + 1$ non interseca mai l'insieme $A \cap B$;
b) la parabola di equazione $y + x^2 + 2 = 0$ interseca l'insieme B in un solo punto;
c) l'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x < 2,\ y = 0\} \in \mathcal{P}(B)$, dove $\mathcal{P}(B)$ indica l'insieme delle parti di B;
d) $A \cap B \subseteq [-2,2] \times [-2,2]$.

2) Siano $f : \mathbb{R} \to [-1, +\infty[$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ le funzioni definite da

$$f(x) = \begin{cases} 2^{-x} & \text{se } x < -1 \\ 2x^2 & \text{se } -1 \le x \le 0 \\ \dfrac{1}{x+1} - 1 & \text{se } x > 0, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} |x+2| & \text{se } x \le -1 \\ -(x-1)^2 + 2 & \text{se } x > -1. \end{cases}$$

i) Rappresentate graficamente f e g nel piano cartesiano.
ii) Determinate $f(\mathbb{R})$; dite se f è suriettiva (motivando la risposta).
iii) Determinate, se esistono, $(f \circ g)(-1)$, $(f+g)(-1)$ e $f^{-1}(2)$.
iv) Determinate gli intervalli di monotonia di g.
v) Calcolate, usando l'interpretazione geometrica dell'integrale, la $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} \int_{-2-k}^{-k} g(x)\,dx$.

3) Sia $f : [-4, +\infty[\to \mathbb{R}$ la funzione rappresentata in figura.



i) Rappresentate sulla retta reale il segno della derivata $f'(x)$.
ii) Dite se f è limitata. Determinate, se esistono, il minimo (risp. i punti di minimo) e il massimo (risp. i punti di massimo) di f su $[-1, 1]$.
iii) Rappresentate graficamente, nei rispettivi insiemi di definizione, le funzioni

$$x \mapsto -f(x+1) \qquad x \mapsto |f(x)| - 1 .$$

---

4) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = x \log(1 + x^2)$.
i) Determinate il segno di f.
ii) Provate che $F(x) = (\frac{1+x^2}{2}) \log(1 + x^2) - \frac{x^2}{2}$ è una primitiva di f.
iii) Determinate l'area della regione piana E delimitata dal grafico di f, dalla retta di equazione $y + x = 0$ e dalla retta di equazione $x = 3$.

---

5) i) Studiate (insieme di definizione, segno, comportamento agli estremi dell'insieme di definizione, derivabilità, punti critici e monotonia, convessità/concavità) la funzione definita da

$$f(x) = \log(1 + \frac{1}{x^2})$$

e rappresentatela graficamente nel piano cartesiano.
ii) Scrivete l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x = 1$.
iii) Calcolate $\int_1^2 x^2 f'(x)\, dx$.

---

6) i) Data la proposizione $\mathcal{A}$ definita da $\mathcal{A} =$ "$\exists x \in \mathbb{Z} : \forall y \in \mathbb{R},\ x < e^y$". Scrivete la sua negazione, ossia **non**$\mathcal{A}$. Dite (motivando la risposta) quale delle due proposizione è vera e quale è falsa.
ii) Risolvete in $\mathbb{R}$ la disequazione

$$2^{-x^2|x|+1} < \log_2 4 .$$

COGNOME ______________	NON SCRIVERE QUI	B
NOME ______________	1 2 3 4 5 6	
MATRICOLA ⌊_⌊_⌊_⌊_⌊_⌊_⌋		

UNIVERSITÀ DI TRENTO — FACOLTÀ DI SCIENZE COGNITIVE

CDL IN SCIENZE E TECNICHE DI PSICOLOGIA COGNITIVA
CDL IN INTERFACCE E TECNOLOGIE DELLA COMUNICAZIONE
CDL IN FILOSOFIA

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA (CON ELEMENTI DI ALGEBRA)

A.A. 2011-2012 — ROVERETO, 14 SETTEMBRE 2012

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **TRE ORE**.
Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.
È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.
Potete usare solo il vostro materiale di scrittura e il vostro materiale di studio. Non usate il colore rosso.

1) i) Data la proposizione $\mathcal{A}$ definita da $\mathcal{A} =$ "$\exists x \in \mathbb{Z} : \forall y \in \mathbb{R},\ x < e^y$". Scrivete la sua negazione, ossia **non**$\mathcal{A}$. Dite (motivando la risposta) quale delle due proposizione è vera e quale è falsa.
ii) Risolvete in $\mathbb{R}$ la disequazione

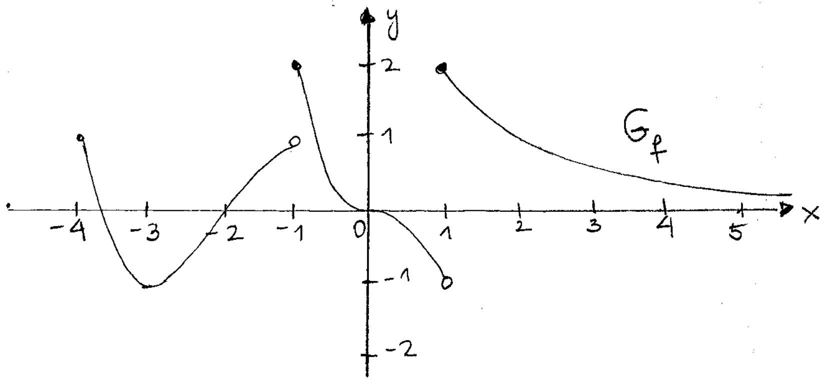
$$2^{-x^2|x|+1} \geq \log_2 4\,.$$

2) Siano A e B gli insiemi dati da

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq |x| \leq 2\}, \qquad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 \leq 4\}\,.$$

i) Disegnate nel piano cartesiano gli insiemi A, B e $A \cap B$.
ii) Determinate le equazioni delle rette orizzontali che non intersecano mai l'insieme $A \cap B$.
iii) Dite quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali sono false (giustificando le risposte, anche solo graficamente):
a) la retta di equazione $y = x + 2$ non interseca mai l'insieme $A \cap B$;
b) la parabola di equazione $y + x^2 + 2 = 0$ interseca l'insieme B in un solo punto;
c) l'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2,\ y = 0\} \in \mathcal{P}(B)$, dove $\mathcal{P}(B)$ indica l'insieme delle parti di B;
d) $A \cap B \subseteq [-2,2] \times [-2,2]$.

3) Sia $f : [-4,+\infty[\to \mathbb{R}$ la funzione rappresentata in figura.



i) Rappresentate sulla retta reale il segno della derivata $f'(x)$.
ii) Dite se f è limitata. Determinate, se esistono, il minimo (risp. i punti di minimo) e il massimo (risp. i punti di massimo) di f su $[-1,1]$.
iii) Rappresentate graficamente, nei rispettivi insiemi di definizione, le funzioni

$$x \mapsto -f(x+1) \qquad x \mapsto |f(x)|-1\,.$$

---

4) Siano $f : \mathbb{R} \to]-1,+\infty[$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ le funzioni definite da

$$f(x) = \begin{cases} 2^{-x} & \text{se } x < -1 \\ 2x^2 & \text{se } -1 \le x \le 0 \\ \dfrac{1}{x+1} - 1 & \text{se } x > 0\,, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} |x+2| & \text{se } x \le -1 \\ (x-1)^2 - 2 & \text{se } x > -1\,. \end{cases}$$

i) Rappresentate graficamente f e g nel piano cartesiano.
ii) Determinate $f(\mathbb{R})$; dite se f è suriettiva (motivando la risposta).
iii) Determinate, se esistono, $(f \circ g)(-1)$, $(f+g)(-1)$ e $f^{-1}(2)$.
iv) Determinate gli intervalli di monotonia di g.
v) Calcolate, usando l'interpretazione geometrica dell'integrale, la $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} \int_{-2-k}^{-k} g(x)\,dx$.

---

5) i) Studiate (insieme di definizione, segno, comportamento agli estremi dell'insieme di definizione, derivabilità, punti critici e monotonia, convessità/concavità) la funzione definita da

$$f(x) = \log(1 + \frac{1}{x^2})$$

e rappresentatela graficamente nel piano cartesiano.
ii) Scrivete l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x=1$.
iii) Calcolate $\displaystyle\int_1^2 x^2 f'(x)\,dx$.

---

6) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = x\log(1+x^2)$.
i) Determinate il segno di f.
ii) Provate che $F(x) = (\dfrac{1+x^2}{2})\log(1+x^2) - \dfrac{x^2}{2}$ è una primitiva di f.
iii) Determinate l'area della regione piana E delimitata dal grafico di f, dalla retta di equazione $y + x = 0$ e dalla retta di equazione $x = 3$.