

Università degli Studi di Trento - Facoltà di Scienze Cognitive
 CdL in Scienze e Tecniche di Psicologia Cognitiva
 CdL in Interfacce e Tecnologie della Comunicazione - CdL in Filosofia
 SECONDA PROVA INTERMEDIA DI ANALISI MATEMATICA (CON ELEMENTI DI ALGEBRA)
 a.a. 2011-2012 - Rovereto, 23 gennaio 2012

FILA (A)

$$1) (x^2 - 5x + 6)|x - 1| > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x + 6 > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \text{ o } x > 3 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

$$S =]-\infty, 2[\cup]3, +\infty[\setminus \{1\}.$$

$$2^{x^2} \cdot 2^{|x|+1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \leq 0 \Leftrightarrow 2^{x^2+|x|+1} \leq 2^3 \Leftrightarrow x^2+|x|+1 \leq 3$$

$$\Leftrightarrow x^2+|x|-2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2+x-2 \leq 0 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} x < 0 \\ x^2-x-2 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ -2 \leq x \leq 1 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} x < 0 \\ -1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$$S = [0, 1] \cup [-1, 0[= [-1, 1].$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(2^{x^2+x}) \leq -\log_3 9 \Leftrightarrow -x^2-x \leq -2 \Leftrightarrow x^2+x-2 \geq 0$$

$$S =]-\infty, -2] \cup [1, +\infty[.$$

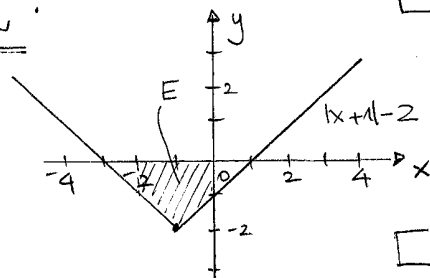
$$2) i) \int_0^1 \frac{x^2}{x^3+1} dx = \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{3x^2}{x^3+1} dx = \frac{1}{3} \left[\log|x^3+1| \right]_0^1 = \frac{1}{3} \log 2;$$

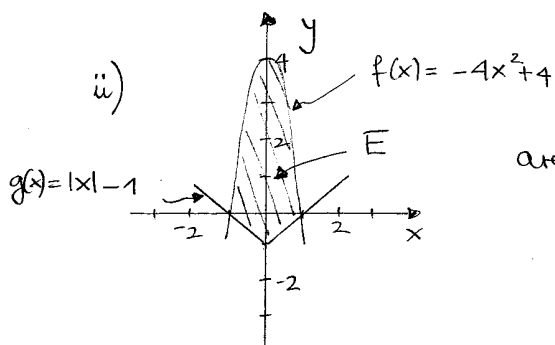
$$\int_1^2 \left(2^x + \sqrt[3]{x+1} + \frac{1}{x^2} \right) dx = \left[\frac{2^x}{\log 2} + \frac{(x+1)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} - \frac{1}{x} \right]_1^2 = \left(\frac{4}{\log 2} + \frac{3}{4} \sqrt[3]{3^4} - \frac{1}{2} \right)$$

$$- \left(\frac{2}{\log 2} + \frac{3}{4} \sqrt[3]{2^4} - 1 \right) = \frac{2}{\log 2} + \frac{9}{4} \sqrt[3]{3} - \frac{3}{2} \sqrt[3]{2} + \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{2}{\log 2} + \frac{9}{4} \sqrt[3]{3} - \frac{3}{2} \sqrt[3]{2} + \frac{1}{2}.$$

$$\int_{-2}^0 (|x+1| - 2) dx = -\text{area}(E) = -3$$





$$\begin{aligned} \text{area}(E) &= 2 \int_{-1}^1 (f(x) - g(x)) dx = 2 \int_{-1}^1 (-4x^2 + 4 - |x| + 1) dx \\ &= 2 \int_{-1}^1 (-4x^2 - x + 5) dx = 2 \left[-\frac{4x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 5x \right]_{-1}^1 = \\ &= 2 \left[-\frac{4}{3} - \frac{1}{2} + 5 \right] = 2 \left[\frac{-8 - 3 + 30}{6} \right] = \frac{19}{3} \quad \square \end{aligned}$$

iii)

$$\sum_{m=2}^{10} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{(m-1)^2} \right) = \left(\frac{1}{4} - 1 \right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{9} \right) + \dots + \left(\frac{1}{81} - \frac{1}{64} \right) + \left(\frac{1}{100} - \frac{1}{81} \right) = -1 + \frac{1}{100} = \frac{-99}{100} \quad \blacksquare$$

3) i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ $y=0$ è asintoto orizzontale per f , per $x \rightarrow -\infty$;

$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty$ $x=-2$ è asintoto verticale per f ;

$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 1$;

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$;

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$, $y=2$ è asintoto orizzontale per f , per $x \rightarrow +\infty$. □

ii)

iii) $\int_{-2}^0 f(x) dx < 0$;

iv) f non soddisfa il teorema di Weierstrass in $[0, 2]$ non essendo continua in $x=1$: infatti $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$ e quindi esiste $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ e vale 1, ma $f(1) = \frac{3}{2} \neq 1$.
Esistono comunque $\max_{[0, 2]} f = \frac{3}{2}$ e $x=1$ è pt. di massimo;
 $\min_{[0, 2]} f = 0$ e $x=2$ è pt. di minimo. □

4) sia $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1 - 3x$. Allora f è continua essendo somma di funzioni continue. Inoltre f è decrescente essendo somma di due funzioni decrescenti: $\left(\frac{1}{2}\right)^x + 1$ e $-3x$.

Poiché $f(0) = 2 > 0$ e $f(1) = \frac{1}{2} + 1 - 3 = -\frac{3}{2} < 0$, grazie al teorema di esistenza degli zeri esiste un'unico $x_0 \in]0, 1[$ tale che $f(x_0) = 0$, ossia x_0 è l'unica soluzione dell'eq. $(\frac{1}{2})^x + 1 = 3x$.

Consideriamo ora il punto medio di $[0, 1]$, ossia $x_1 = \frac{1}{2}$; allora $f(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}} + 1 - 3 \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} > 0$ (nota: $\sqrt{\frac{1}{2}} > \frac{1}{2}$ essendo $\sqrt{x} > x$ per ogni $0 < x < 1$). Possiamo dunque dire che $x_0 \in]\frac{1}{2}, 1[$.

Quindi consideriamo il punto medio di $[\frac{1}{2}, 1]$, ossia $x_2 = \frac{3}{4}$.

Osserviamo che $f(\frac{3}{4}) = (\frac{1}{2})^{\frac{3}{4}} + 1 - 3 \cdot \frac{3}{4} = (\frac{1}{2})^{\frac{3}{4}} - \frac{5}{4} < 0$ poiché $(\frac{1}{2})^{\frac{3}{4}} < 1$ e $\frac{5}{4} > 1$. Possiamo allora porre $\tilde{a} = \frac{1}{2}$ e $\tilde{b} = \frac{3}{4}$ e mi ha quanto richiesto. ■

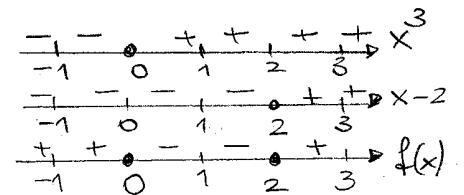
5) i) $f(x) = x^4 - 2x^3$ • $\text{dom } f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

• $f(x) = x^3(x-2)$

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

• f è continua in $\mathbb{R}$ essendo somma di funzioni continue in $\mathbb{R}$.

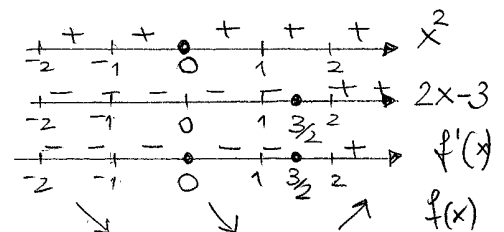
• $\text{dom } f' = \mathbb{R}$ $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 = 2x^2(2x-3)$



$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = \frac{3}{2}$ sono pt. critici perf

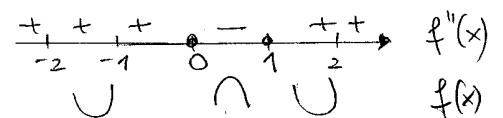
$f(0) = 0$

$f(\frac{3}{2}) = \frac{27}{8} (\frac{3}{2} - 2) = -\frac{27}{16} = -1.7$



$x = \frac{3}{2}$ è un pt. di minimo loc. stretto per f

• $\text{dom } f'' = \mathbb{R}$ $f''(x) = 12x^2 - 12x = 12x(x-1)$



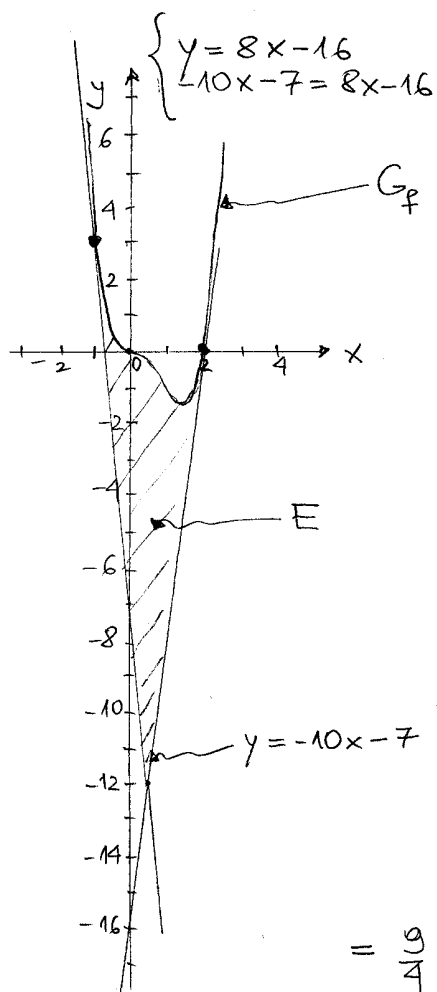
ii) $(-1, f(-1)) = (-1, 3)$ $f'(-1) = -10$

$$y = 3 - 10(x+1) \Rightarrow \underline{y = -10x - 7} \quad \text{è l'eq. della retta tg al grafico di } f \text{ in } (-1, 3);$$

$$(2, f(2)) = (2, 0) \quad f'(2) = 8$$

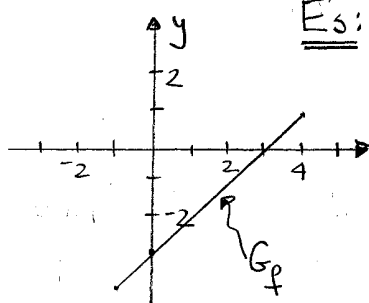
$$y = 0 + 8(x-2) \Rightarrow \underline{y = 8x - 16} \quad \text{è l'eq. della retta tg al grafico di } f \text{ in } (2, 0).$$

Notiamo che $y = -10x - 7$ e $y = 8x - 16$ si intersecano in:



$$\begin{aligned} \text{iii) area}(E) &= \int_{-1}^{\frac{1}{2}} (f(x) - (-10x - 7)) dx + \\ &+ \int_{\frac{1}{2}}^2 (f(x) - (8x - 16)) dx = \\ &= \int_{-1}^{\frac{1}{2}} (x^4 - 2x^3 + 10x + 7) dx + \int_{\frac{1}{2}}^2 (x^4 - 2x^3 - 8x + 16) dx \\ &= \left[\frac{x^5}{5} - \frac{2x^4}{4} + 5x^2 + 7x \right]_{-1}^{\frac{1}{2}} + \left[\frac{x^5}{5} - \frac{2x^4}{4} - 4x^2 + 16x \right]_{\frac{1}{2}}^2 \\ &= \left[\frac{1}{5} \left(\frac{1}{2} \right)^5 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^4 + 5 \left(\frac{1}{2} \right)^2 + 7 \left(\frac{1}{2} \right) \right] - \left[-\frac{1}{5} - \frac{1}{2} + 5 - 7 \right] + \\ &+ \left[\frac{32}{5} - 8 - 16 + 32 \right] - \left[\frac{1}{5} \left(\frac{1}{2} \right)^5 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^4 - 4 \left(\frac{1}{2} \right)^2 + 8 \right] \\ &= \frac{9}{4} + 4 + 2 + \frac{33}{5} = 6 + \frac{9}{4} + \frac{33}{5} = \underline{\underline{\frac{297}{20}}} \end{aligned}$$

6)



Es: $f(x) = x - 3$ soddisfa i) ii) + iii):

$$\text{i) Infatti: } f(x) < 0 \text{ in } [-1, 3[\quad f(3) = 0 \\ f(x) > 0 \text{ in }]3, 4];$$

$$\text{ii) } f'(x) = 1 \text{ in }]-1, 4[;$$

$$\text{iii) } \int_{-1}^4 f(x) dx = -8 + \frac{1}{2} = -\frac{15}{2}.$$