

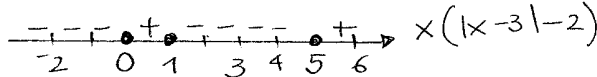
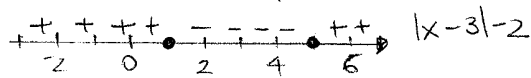
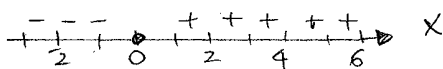
Università degli Studi di Trento - Facoltà di Scienze Cognitive
 CdL in Scienze e Tecniche di Psicologia Cognitiva
 CdL in Interfacce e Tecnologie della Comunicazione - CdL in Filosofia
 SECONDA PROVA INTERMEDIA DI ANALISI MATEMATICA (CON ELEMENTI DI ALGEBRA)
 a.a. 2011-2012 - Rovereto, 19 dicembre 2011

FILA (A)

1) • $x(|x-3|-2) < 0$: osserviamo che $|x-3|-2 > 0 \Leftrightarrow |x-3| > 2$

$\Leftrightarrow x-3 < -2 \vee x-3 > 2$

$\Leftrightarrow x < 1 \vee x > 5$



$S =]-\infty, 0[\cup]1, 5[$;

• $2^{x+1} 2^{x^2-1} < \left(\frac{1}{2}\right)^x \Leftrightarrow 2^{x+1+x^2-1} < 2^{-x} \Leftrightarrow x^2+x < -x$
 $2^{x \uparrow}$

$\Leftrightarrow x^2+2x < 0 \Rightarrow \underline{\underline{S =]-2, 0[}}$;

• $\log_{1/2}(x+1) - \log_{1/2}(x-x^2) \leq -1 \Leftrightarrow \log_{1/2}(x+1) - \log_{1/2}(x-x^2) \leq \log_{1/2} 2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1 > 0 \\ x-x^2 > 0 \\ \log_{1/2}\left(\frac{x+1}{x-x^2}\right) \leq \log_{1/2} 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 > 0 \\ x-x^2 > 0 \\ \frac{x+1}{x-x^2} \geq 2 \end{cases}$
 $\log_{1/2} x \downarrow$ $\uparrow$ perché $x-x^2 > 0$

$\begin{cases} x > -1 \\ 0 < x < 1 \\ x+1 \geq 2(x-x^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ 0 < x < 1 \\ 2x^2-x+1 \geq 0 \end{cases}$

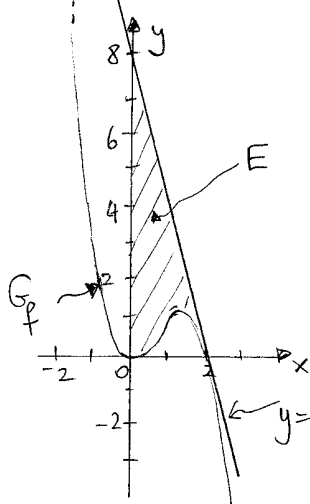
$\Rightarrow \begin{cases} x > -1 \\ 0 < x < 1 \\ \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{S =]0, 1[}}$.

2) i) $\int_1^2 \frac{2e^x}{e^x-1} dx = 2 \left[\log|e^x-1| \right]_1^2 = 2 \left[\log(e^2-1) - \log(e-1) \right] = 2 \log\left(\frac{e^2-1}{e-1}\right)$
 $= 2 \log\left(\frac{(e-1)(e+1)}{e-1}\right) = \underline{\underline{2 \log(e+1)}}$;

$\int_{-3}^{-1} \frac{3x^2 + \sqrt[3]{x} + 4}{x} dx = \int_{-3}^{-1} \left(3x + x^{-2/3} + \frac{4}{x} \right) dx = \left[\frac{3x^2}{2} + \frac{x^{1/3}}{1/3} + 4 \log|x| \right]_{-3}^{-1}$
 $= \left(\frac{3}{2} - 3 \right) - \left(\frac{27}{2} - 3\sqrt[3]{3} + 4 \log 3 \right) = \underline{\underline{-15 + 3\sqrt[3]{3} - 4 \log 3}}$;

$$\sum_{n=1}^9 n^2 \left[\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} 2 dx \right] = \sum_{n=1}^9 n^2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{n} = 6 \sum_{n=1}^9 n = 6(1+2+3+\dots+8+9) = 6 \cdot 45 = \underline{270} \quad \square$$

ii) $f(x) = 2x^2 - x^3$: $\text{dom } f = \mathbb{R}$; $f(x) = x^2(2-x)$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

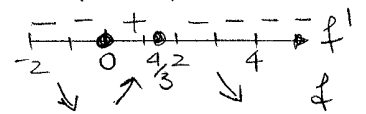
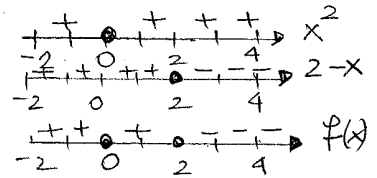
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

$$\text{dom } f' = \mathbb{R} \quad f'(x) = 4x - 3x^2 = x(4-3x)$$

$x=0$ pt. di minimo loc. stetto

$$f(0) = 0$$

$x = \frac{4}{3}$ pt. di massimo loc. stetto



$$f\left(\frac{4}{3}\right) = 2 \cdot \frac{16}{9} - \frac{64}{27} = \frac{6 \cdot 16 - 64}{27} = \frac{32}{27}$$

$$f'(2) = 8 - 3 \cdot 4 = -4$$

$$y = 0 - 4(x-2) \rightsquigarrow y = -4x + 8 \text{ retta tg. al grafico di } f \text{ in } (2,0).$$

$$\begin{aligned} \text{area}(E) &= \int_0^2 [(-4x+8) - (2x^2-x^3)] dx = \int_0^2 [-4x+8-2x^2+x^3] dx = \\ &= \left[-2x^2 + 8x - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \right]_0^2 = -8 + 16 - \frac{16}{3} + \frac{16}{4} = 12 - \frac{16}{3} = \frac{20}{3} \quad \square \end{aligned}$$

iii) $\forall n \in \mathbb{N} \quad g_n(x) = -nx^2 + x = -n\left(x^2 - \frac{1}{n}x\right) = -n\left(x - \frac{1}{2n}\right)^2 + \frac{1}{4n}$. Si ha

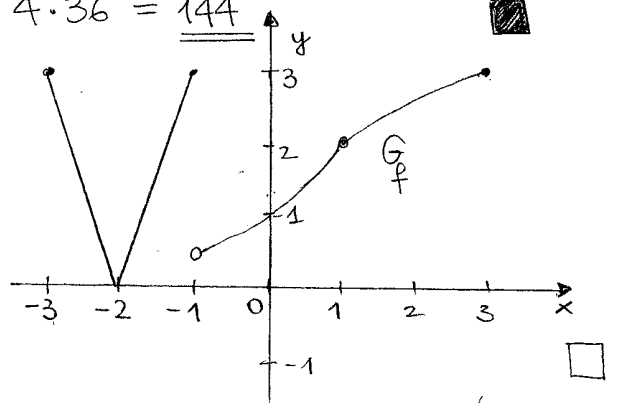
$$M_n = \frac{1}{4n} \quad \text{Si ha} \quad \sum_{n=1}^8 \frac{1}{M_n} = \sum_{n=1}^8 4n = 4(1+2+3+\dots+7+8)$$

$$= 4 \cdot 36 = \underline{144} \quad \blacksquare$$

3) $f: [-3, 3] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 3|x+2| & \text{se } -3 \leq x \leq -1 \\ 2^x & \text{se } -1 < x < 1 \\ \log_3 x + 2 & \text{se } 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

i)



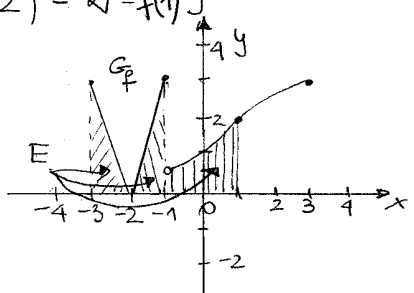
ii) Oss. che basta studiare la continuità nei pt. $x = -1$ e $x = 1$ (negli altri pt. f è continua perché definita mediante funzioni continue).

Ors, $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (2^x) = 2^{-1} = \frac{1}{2} \neq f(-1) = 3$ e quindi f non è continua in $x = -1$.

Osserviamo che $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2^x) = 2$
 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (\log_3 x + 2) = 2 = f(1)$ } $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2 = f(1)$

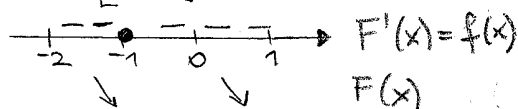
e quindi f è continua in $x = 1$. □

iii) $\int_{-3}^1 f(x) dx = \text{area}(E) =$
 $= \int_{-3}^{-1} f(x) dx + \int_{-1}^1 f(x) dx = 3 + \int_{-1}^1 2^x dx$
 $= 3 + \left[\frac{2^x}{\log 2} \right]_{-1}^1 = 3 + \frac{2}{\log 2} - \frac{1}{2 \log 2} = 3 + \frac{3}{2 \log 2}$ □



iv) f non soddisfa il teorema di Weierstrass su $[-3, 3]$ non essendo continua in $x = -1$. Notiamo però che $x = -3, x = -1, x = 3$ sono pt. di massimo di f su $[-3, 3]$, e $x = -2$ è pt. di minimo per f su $[-3, 3]$. ■

4) i) Dal teorema fondamentale del calcolo integrale sappiamo che $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in [-2, 1]$. Quindi

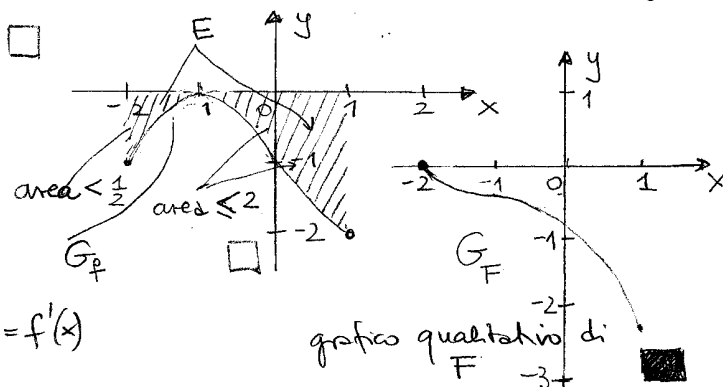


Quindi F è decrescente su $[-2, 1]$ (a questa conclusione possiamo anche arrivare immediatamente usando la definizione di $F(x)$ e l'interpretazione geometrica dell'integrale). □

ii) Dal pt. i) segue dunque che $x = -2$ è pt. di massimo loc. stretto (e globale) di F su $[-2, 1]$ e $x = 1$ è pt. di minimo loc. stretto (e globale) di F su $[-2, 1]$. □

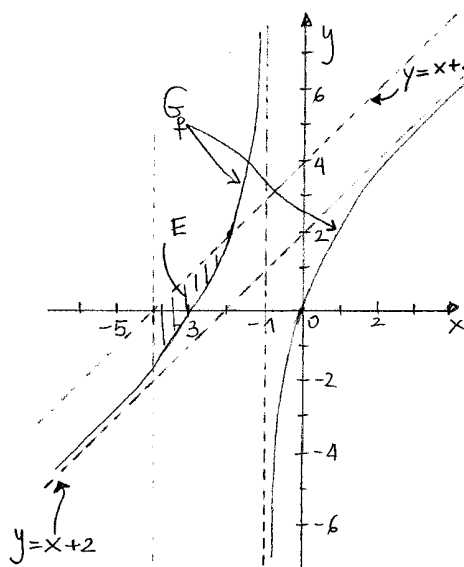
iii) Basta osservare che

$$F(1) = -\text{area}(E) > -\frac{1}{2} - 2 = -\frac{5}{2}.$$

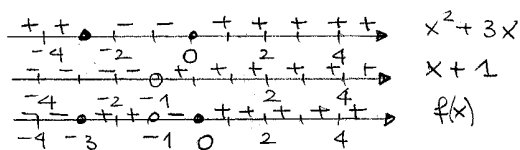


iv) $F''(x) = f'(x)$
 $F(x)$

5) $f(x) = \frac{x^2+3x}{x+1}$ i) • $\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{-1\} =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$.



segno di f



• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$ $x = -1$ asint. verticale per f

Oss. che f ha un asintoto obliquo (per $x \rightarrow \pm\infty$)

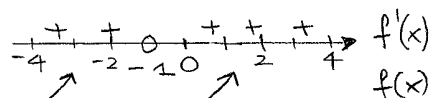
$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x^2+3x}{x+1} - x \right] = 2$

L'asintoto obliquo è dato dalla retta di eq. $y = x + 2$ (questo si poteva dedurre anche dal pr. ii)).

• f è continua su $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ (essendo rapporto di funzioni continue)

• $\text{dom } f' = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ $f'(x) = \frac{(2x+3)(x+1) - (x^2+3x)}{(x+1)^2} = \frac{2x^2+5x+3 - x^2-3x}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x+3}{(x+1)^2}$

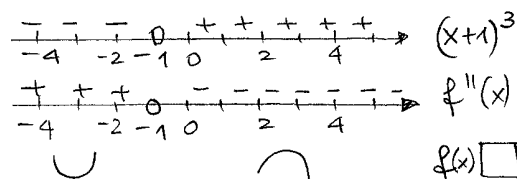
Oss. $f'(x) \neq 0 \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$



• $\text{dom } f'' = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$f''(x) = \frac{(2x+2)(x+1)^2 - (x^2+2x+3)2(x+1)}{(x+1)^4} =$

$= \frac{2x^2+4x+2 - 2x^2-4x-6}{(x+1)^3} = \frac{-4}{(x+1)^3}$



ii) Basta osservare che

$x+2 - \frac{2}{x+1} = \frac{(x+2)(x+1) - 2}{x+1} = \frac{x^2+3x+2-2}{x+1} = \frac{x^2+3x}{x+1} = f(x) \quad \forall x \neq -1$

iii) $\frac{x^2+3x}{x+1} = x+4 \Leftrightarrow \frac{x^2+3x - x^2-5x-4}{x+1} = 0 \Leftrightarrow -2x-4=0 \Leftrightarrow x=-2$

$\text{area}(E) = \int_{-4}^{-2} (x+4 - f(x)) dx = \int_{-4}^{-2} \left(x+4 - x-2 + \frac{2}{x+1} \right) dx = \int_{-4}^{-2} \left(2 + \frac{2}{x+1} \right) dx = \left[2x + 2\log|x+1| \right]_{-4}^{-2} = (-4 + 2\log 0) - (-8 + 2\log 3) = 4 - 2\log 3.$

6) Oss. che $f(x) = \frac{1}{g(x)}$, dove $g(x) = 2e^x + 2x - 3$. Ora $g(0) = -1$ e $g(1) = 2e - 1 > 0$.

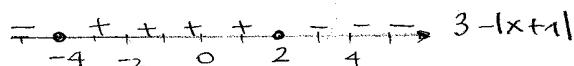
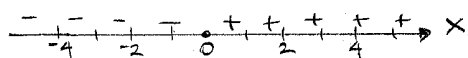
Inoltre g è continua; per il teorema di Weierstrass degli zeri esiste $x_0 \in]0, 1[$

t.c. $g(x_0) = 0$. Quindi f non è ben definita su $[0, 1]$.

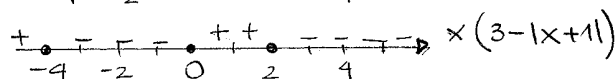
FILA (3)

1) • $x(3-|x+1|) < 0$: osserviamo che $3-|x+1| > 0 \Leftrightarrow |x+1| < 3 \Leftrightarrow$

$$-3 < x+1 < 3 \Leftrightarrow -4 < x < 2$$



$$S =]-4, 0[\cup]2, +\infty[;$$



• $2^{x+1} \cdot 2^{3x^2-1} < \left(\frac{1}{4}\right)^x \Leftrightarrow 2^{x+1+3x^2-1} < 2^{-2x} \Leftrightarrow 3x^2+x < -2x$

$$\Leftrightarrow 3x^2+3x < 0 \Rightarrow S =]-1, 0[;$$

• $\log_{1/3}(x+1) - \log_{1/3}(x-3x^2) \leq -1 \Leftrightarrow \log_{1/3}(x+1) - \log_{1/3}(x-3x^2) \leq \log_{1/3} 3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1 > 0 \\ x-3x^2 > 0 \\ \log_{1/3}\left(\frac{x+1}{x-3x^2}\right) \leq \log_{1/3} 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 > 0 \\ x-3x^2 > 0 \\ \frac{x+1}{x-3x^2} \geq 3 \end{cases}$$

$\log_{1/3} x \downarrow$ $\text{perché } x-3x^2 > 0$

$$\begin{cases} x > -1 \\ 0 < x < 1/3 \\ x+1 \geq 3(x-3x^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ 0 < x < 1/3 \\ 9x^2-2x+1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ 0 < x < 1/3 \\ \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow S =]0, 1/3[.$$

2) i) $\int_1^2 \frac{3e^x}{e^x+1} dx = 3 \left[\log|e^x+1| \right]_1^2 = 3 \left[\log(e^2+1) - \log(e+1) \right] = 3 \log \left(\frac{e^2+1}{e+1} \right);$

$$\int_{-3}^{-1} \frac{3x^2 + \sqrt[3]{x} - 4}{x} dx = \int_{-3}^{-1} \left(3x + x^{-2/3} - \frac{4}{x} \right) dx = \left[\frac{3x^2}{2} + \frac{x^{1/3}}{1/3} - 4 \log|x| \right]_{-3}^{-1}$$

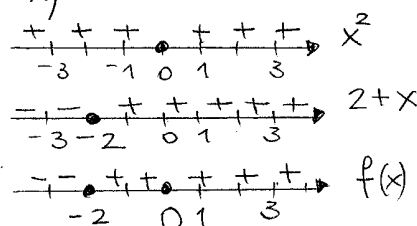
$$= \left(\frac{3}{2} - 3 \right) - \left(\frac{27}{2} - 3\sqrt[3]{3} - 4 \log 3 \right) = -15 + 3\sqrt[3]{3} + 4 \log 3;$$

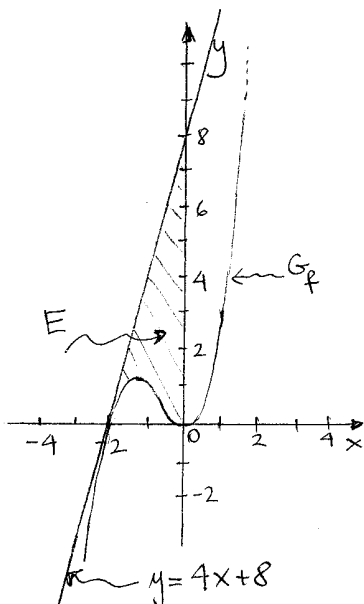
$$\sum_{n=1}^9 n^2 \left[\int_{-1/n}^{1/n} 4 dx \right] = \sum_{n=1}^9 n^2 \cdot 4 \cdot \frac{2}{n} = 12 \sum_{n=1}^9 n = 12(1+2+\dots+9) = 12 \cdot 45 = 540$$

ii) $f(x) = 2x^2 + x^3$: $\text{dom } f = \mathbb{R}$; $f(x) = x^2(2+x)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$





- 6 -

$$\text{dom } f' = \mathbb{R} \quad f'(x) = 4x + 3x^2 = x(4 + 3x)$$

$$x = -\frac{4}{3} \text{ pt. di max. loc. stretto} \quad f(-\frac{4}{3}) = \frac{32}{27}$$

$$x = 0 \text{ pt. di min. loc. stretto} \quad f(0) = 0$$

$$f'(-2) = -8 + 12 = 4$$

$$y = 0 + 4(x + 2) \rightsquigarrow \underline{y = 4x + 8} \text{ retta tg. al grafico di } f \text{ in } (-2, 0)$$

$$\begin{aligned} \text{area}(E) &= \int_{-2}^0 [(4x + 8) - (2x^2 + x^3)] dx = \int_{-2}^0 [4x + 8 - 2x^2 - x^3] dx \\ &= \left[2x^2 + 8x - \frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_{-2}^0 = - \left[8 - 16 + \frac{16}{3} - \frac{16}{4} \right] = \underline{\underline{\frac{20}{3}}} \end{aligned}$$

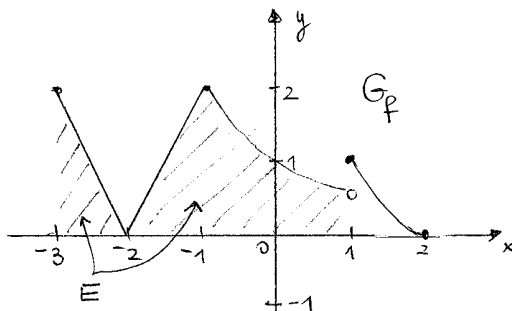
$$\text{iii)} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad g_n(x) = -nx^2 + 2x = -n(x^2 - \frac{2}{n}x) = -n(x - \frac{1}{n})^2 + \frac{1}{n} \text{ si ha}$$

$$M_n = \frac{1}{n} \text{ si ha } \sum_{n=1}^8 \frac{1}{M_n} = \sum_{n=1}^8 n = 1 + 2 + \dots + 8 = \underline{\underline{36}}$$

$$3) \quad f: [-3, 2] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2|x+2| & \text{se } -3 \leq x \leq -1 \\ 2^{-x} & \text{se } -1 < x < 1 \\ |\log_2 x - 1| & \text{se } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

i)



ii) Oss che basta studiare la continuità nei pt. $x = -1$ e $x = 1$ (negli altri pt. la funzione f è continua poiché definita mediante funzioni continue). Ora, $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} 2^{-x} = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 2 = f(-1)$
 $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} 2|x+2| = 2$

Quindi f è continua in $x = -1$.

$$\begin{aligned} \text{Osserviamo che } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} 2^{-x} = 2^{-1} = \frac{1}{2} \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} |\log_2 x - 1| = 1 \end{aligned} \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

Quindi f è discontinua in $x = 1$.

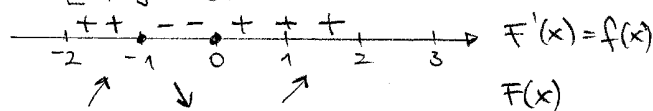
$$\begin{aligned} \text{iii)} \quad \int_{-3}^1 f(x) dx &= \text{area}(E) = \int_{-3}^{-1} f(x) dx + \int_{-1}^1 f(x) dx = 2 + \int_{-1}^1 2^{-x} dx = \\ &= 2 - \left[\frac{2^{-x}}{\log 2} \right]_{-1}^1 = 2 - \left[\frac{1}{2 \log 2} - \frac{2}{\log 2} \right] = \underline{\underline{2 + \frac{3}{2 \log 2}}} \end{aligned}$$

iv) f non soddisfa le ipotesi del teorema di Weierstrass su $[-3, 2]$.

Notiamo però che $x = -3$, $x = -1$ sono pt. di massimo di f su $[-3, 2]$,
e $x = -2$ e $x = 2$ sono pt. di minimo per f su $[-3, 2]$. $\blacksquare$

4) i) Dal teorema fondamentale del calcolo integrale sappiamo che $F'(x) = f(x)$

$\forall x \in [-2, 2]$. Quindi



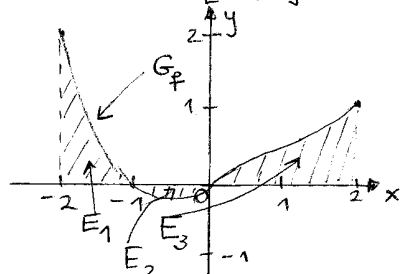
Quindi F è crescente su $[-2, -1]$, è decrescente su $[-1, 0]$ ed è crescente su $[0, 2]$ (a questa conclusione possiamo anche giungere immediatamente usando la definizione di $F(x)$ e l'interpretazione geometrica dell'integrale). $\square$

ii) Dal pt. i) segue dunque che $x = -2$ e $x = 0$ sono pt. di minimo loc.

stretto per F su $[-2, 2]$ e $x = -1$ e $x = 2$ sono pt. di massimo loc.

stretto di F su $[-2, 2]$. $\square$

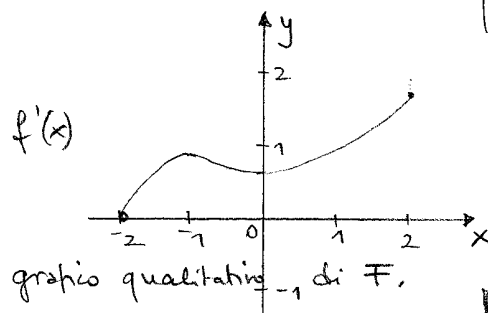
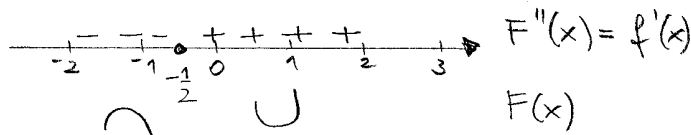
iii)



$$F(2) = \text{area } E_1 - \text{area } E_2 + \text{area } E_3$$

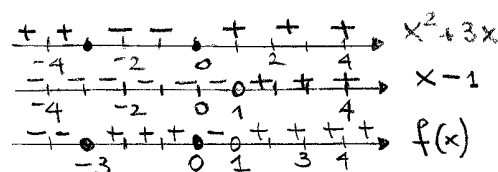
$$< 1 - \text{area } E_2 + 1 < 2$$

iv)



5) $f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x - 1}$ i) • $\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{1\} =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$

• segno di f



• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$

$x = 1$ asintoto verticale per f

Oss. che f ha un asintoto obliquo:

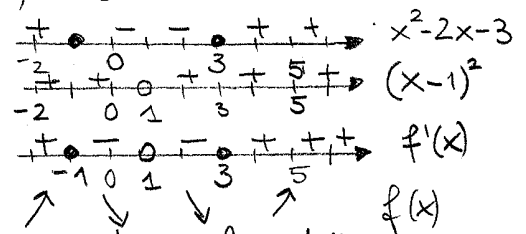
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = 4$$

L'asintoto obliquo è dato dalla retta di eq. $y = x + 4$ (questo si poteva dedurre anche dal pr. ii)).

• f è continua su $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ (essendo rapporto di funzioni continue)

• $\text{dom } f' = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ $f'(x) = \frac{(2x+3)(x-1) - (x^2+3x)}{(x-1)^2} =$
 $= \frac{2x^2 + x - 3 - x^2 - 3x}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}$

Oss. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1, x = 3$



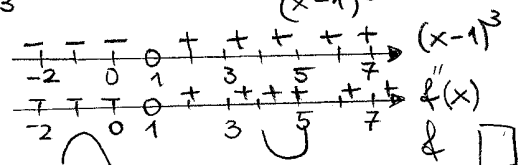
$$f(-1) = \frac{1-3}{-2} = \underline{\underline{1}}$$

$x = -1$ pt. di max. loc. stretto

$$f(3) = \frac{18}{2} = \underline{\underline{9}}$$

$x = 3$ pt. di min. loc. stretto p.u.f.

• $\text{dom } f'' = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ $f''(x) = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - (x^2-2x-3) \cdot 2 \cdot (x-1)}{(x-1)^4} =$
 $= \frac{2x^2 - 4x + 2 - 2x^2 + 4x + 6}{(x-1)^3} = \frac{8}{(x-1)^3}$



ii) Basta osservare che

$$x + 4 + \frac{4}{x-1} = \frac{(x+4)(x-1) + 4}{x-1} = \frac{x^2 + 3x - 4 + 4}{x-1} = \frac{x^2 + 3x}{x-1} = f(x) \quad \forall x \neq 1$$

iii) $g(x) = x^2 + 3x = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$

$$\text{area}(E) = \int_{-3}^0 (f(x) - g(x)) dx = \int_{-3}^0 \left(x + 4 + \frac{4}{x-1} - x^2 - 3x\right) dx = \int_{-3}^0 \left(-x^2 + 4 - x + \frac{4}{x-1}\right) dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + 4x - \frac{x^2}{2} + 4 \log|x-1|\right]_{-3}^0 = -\left[-9 - 12 + 9 + 4 \log 4\right] = \underline{\underline{12 - 4 \log 4}}$$

6) Oss. che $f(x) = \frac{1}{g(x)}$, dove $g(x) = -2e^x + x + 3$. Ora $g(0) = 1$ e $g(1) = -2e + 4 < 0$.

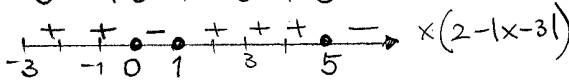
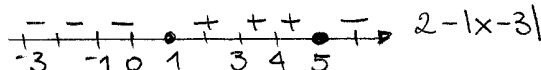
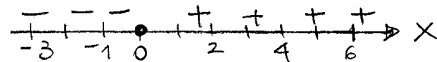
Inoltre g è continua. Per il teorema di Weierstrass degli zeri esiste $x_0 \in]0, 1[$

t.c. $g(x_0) = 0$. Quindi f non è ben definita su $[0, 1]$. ■

FILA (C)

1) $x(2-|x-3|) < 0$: oss. che $2-|x-3| > 0 \Leftrightarrow |x-3| < 2$

$\Leftrightarrow -2 < x-3 < 2 \Leftrightarrow 1 < x < 5$



$S =]0, 1[\cup]5, +\infty[$;

• $2^{x+1} \cdot 2^{x^2-1} > \left(\frac{1}{8}\right)^x \Leftrightarrow 2^{x+1+x^2-1} > 2^{-3x} \Leftrightarrow x^2+x > -3x$

$\Leftrightarrow x^2+4x > 0 \Rightarrow S =]-\infty, -4[\cup]0, +\infty[$;

• $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) - \log_{\frac{1}{2}}(x-x^2) \leq -1$

(vedi FILA (A) Es. 1)) $S =]0, 1[$.

2) i) $\int_1^2 \frac{2e^x}{1-e^x} dx = -2 \int_1^2 \frac{-e^x}{1-e^x} dx = -2 [\log|1-e^x|]_1^2 = -2 [\log|1-e^2| - \log|1-e|]$

$= -2 [\log(e^2-1) - \log(e-1)] = -2 \log\left(\frac{e^2-1}{e-1}\right) = \underline{-2 \log(e+1)}$;

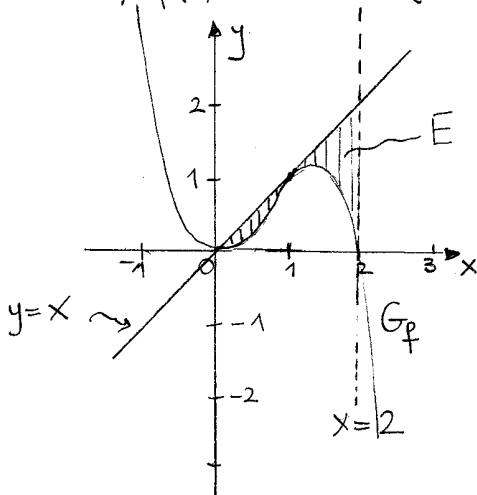
$\int_{-3}^{-1} \frac{3x^2 - \sqrt[3]{x} + 4}{x} dx = \int_{-3}^{-1} \left(3x - x^{-2/3} + \frac{4}{x}\right) dx = \left[3\frac{x^2}{2} - \frac{x^{1/3}}{1/3} + 4\log|x|\right]_{-3}^{-1} =$

$= \left(\frac{3}{2} + 3\right) - \left(\frac{27}{2} + 3\sqrt[3]{3} + 4\log 3\right) = \underline{-9 - 3\sqrt[3]{3} - 4\log 3}$;

$\sum_{n=1}^9 n^2 \left[\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} 3 dx \right] = \sum_{n=1}^9 n^2 \cdot 3 \cdot \frac{2}{n} = 6 \sum_{n=1}^9 n = 6 \cdot (1+2+\dots+8+9) = 6 \cdot 45$

$= 405$

ii) $f(x) = 2x^2 - x^3$ (vedi FILA (A), Es. 2 ii))



$f'(x) = 4x - 3x^2$ $f'(1) = 1$; l'eq. della

retta tg. al grafico di f in $(1, 1)$ è $y = 1 + (x-1)$

ossia $y = x$. Si ha

$\text{area}(E) = \int_0^2 [x - (2x^2 - x^3)] dx = \int_0^2 [x - 2x^2 + x^3] dx$

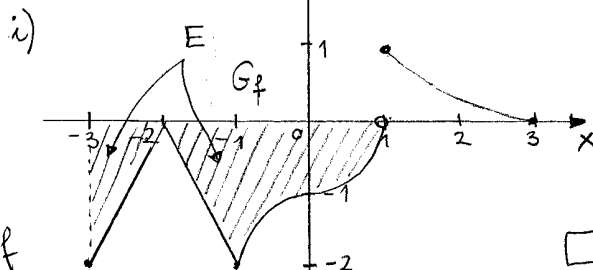
$= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \right]_0^2 = \left(2 - \frac{16}{3} + 4 \right)$

$= \frac{2}{3}$

iii) $\forall n \in \mathbb{N} \quad g_n(x) = -nx^2 - x = -n\left(x^2 + \frac{1}{n}x\right) = -n\left(x + \frac{1}{2n}\right)^2 + \frac{1}{4n}$.
 Si ha $M_n = \frac{1}{4n}$ e ne segue $\sum_{n=1}^8 \frac{1}{M_n} = \sum_{n=1}^8 4n = 4(1+2+\dots+8) = 4 \cdot 36 = \underline{\underline{144}}$. ■

3) $f: [-3, 3] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} -2|x+2| & \text{se } -3 \leq x \leq -1 \\ x^3 - 1 & \text{se } -1 < x < 1 \\ |\log_3 x - 1| & \text{se } 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$$



ii) Basta studiare la continuità di f

nei pt. $x = -1$ e $x = 1$ (negli altri punti f è continua perché definita da funzioni continue). Poiché $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} [-2|x+2|] = -2 = f(-1)$
 $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} [x^3 - 1] = -2$

si ha $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -2 = f(-1)$. Quindi f è continua in $x = -1$.

Poiché $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} [x^3 - 1] = 0 \neq f(1)$ essendo $f(1) = 1$, si ha che

f non è continua in $x = 1$. □

iii) $\int_{-3}^1 f(x) dx = \int_{-3}^{-1} f(x) dx + \int_{-1}^1 f(x) dx = -2 + \int_{-1}^1 (x^3 - 1) dx = -2 + \left[\frac{x^4}{4} - x \right]_{-1}^1 =$
 $= -2 + \left[\left(\frac{1}{4} - 1 \right) - \left(\frac{1}{4} + 1 \right) \right] = -2 - 2 = \underline{\underline{-4}}$. (= - area E) □

iv) f non soddisfa il teorema di Weierstrass poiché non è continua in $[-3, 3]$. Notiamo però che $x = 1$ è pt. di massimo per f in $[-3, 3]$, e $x = -3$, $x = -1$ sono pt. di minimo di f in $[-3, 3]$. ■

4) i) Dal teorema fondamentale del calcolo integrale sappiamo che

$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [-2, 1]$. Quindi $F'(x) = f(x)$

Quindi F è crescente su $[-2, 1]$ (a questa conclusione possiamo anche giungere immediatamente usando la definizione di $F(x)$ e l'interpretazione geometrica dell'integrale). □

ii) Dal pt. i) segue dunque che $x = -2$ è pt. di min. loc. stretto (e globale) di F in $[-2, 1]$ e $x = 1$ è pt. di max. loc. stretto (e globale) di F in $[-2, 1]$.

iii) Basta osservare che

$$F(1) = \text{area}(E) < \frac{1}{2} + 2.$$

iv) $F''(x) = f'(x)$

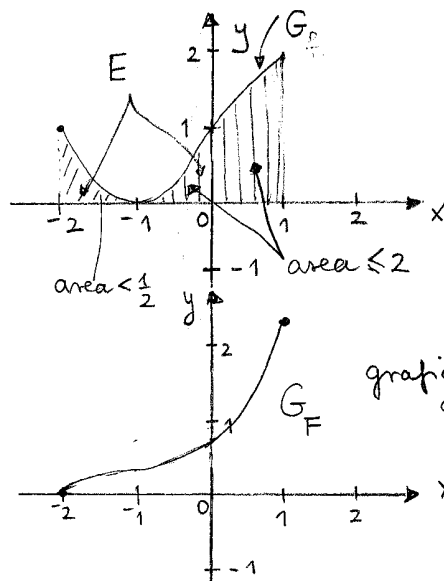
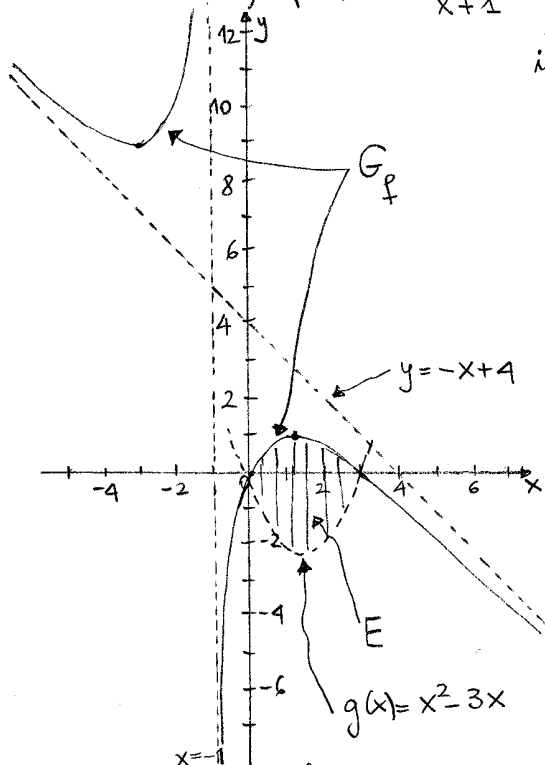


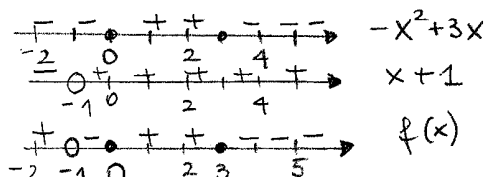
grafico qualitativo di F

5) $f(x) = \frac{-x^2 + 3x}{x+1}$



i) $\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{-1\} =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$

• segue di f



• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$ ($x = -1$ asint. verticale per f)

Oss. che f ha un asintoto obliquo:

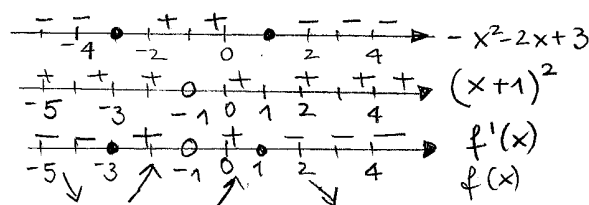
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -1 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{-x^2 + 3x}{x+1} + x \right] = 4$$

L'asintoto obliquo è dato dalla retta di eq. $y = -x + 4$ (questo si poteva dedurre anche dal pt. ii))

• f è continua in $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ (essendo rapporto di funzioni continue).

• $\text{dom } f' = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ $f'(x) = \frac{(-2x+3)(x+1) - (-x^2+3x)}{(x+1)^2} = \frac{-2x^2+x+3+x^2-3x}{(x+1)^2} = \frac{-x^2-2x+3}{(x+1)^2}$

Abbiamo $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 - 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{-2} = \frac{2 \pm 4}{-2} = \begin{cases} -3 \\ 1 \end{cases}$ pt. anticipati



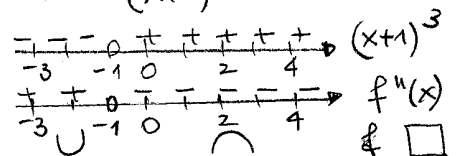
Si ottiene che $x = -3$ è pt. di min. loc. shello per f e $f(-3) = \underline{9}$,

mentre $x = 1$ è pt. di max. loc. shello per f e $f(1) = \underline{1}$

• $\text{dom } f'' = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$$f''(x) = \frac{(-2x-2)(x+1)^2 - (-x^2-2x+3) \cdot 2(x+1)}{(x+1)^3} =$$

$$= \frac{-2x^2 - 4x - 2 + 2x^2 + 4x - 6}{(x+1)^3} = \frac{-8}{(x+1)^3}$$



ii) Basta osservare che

$$-x+4 - \frac{4}{x+1} = \frac{(-x+4)(x+1) - 4}{x+1} =$$

$$= \frac{-x^2+3x+4-4}{x+1} = \frac{-x^2+3x}{x+1} = f(x) \quad \forall x \neq -1. \quad \square$$

iii) $g(x) = x^2 - 3x = (x - \frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4}$

$$\text{area}(E) = \int_{-3}^1 [f(x) - g(x)] dx = \int_{-3}^1 \left(-x+4 - \frac{4}{x+1} - x^2+3x \right) dx =$$

$$= \int_{-3}^1 \left(2x+4 - \frac{4}{x+1} - x^2 \right) dx = \left[x^2+4x - 4 \log|x+1| - \frac{x^3}{3} \right]_{-3}^1 =$$

$$= (9+12-4 \log 4 - 9) = \underline{12-4 \log 4}. \quad \blacksquare$$

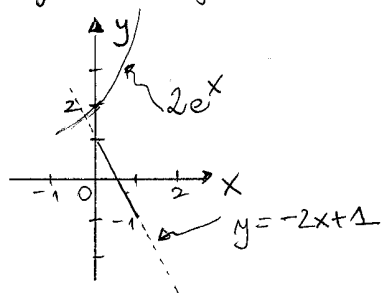
6) Oss. che $f(x) = \frac{1}{g(x)}$, dove $g(x) = 2e^x + 2x - 1$. Ora $g(0) = 1$ e

$g(1) = 2e + 1 > 0$. Notiamo che $g'(x) = 2e^x + 2 > 0 \quad \forall x \in [0, 1]$

quindi g è crescente su $[0, 1]$. Rimetta che g è sempre positiva.

Quindi f è ben definita su $[0, 1]$. $\blacksquare$

Spiegazione "grafica": basta osservare che $2e^x + 2x - 1 = 0$ su $[0, 1]$



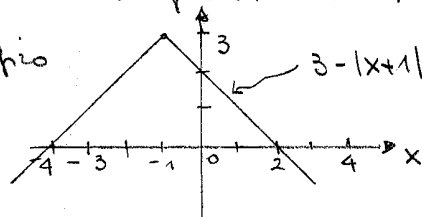
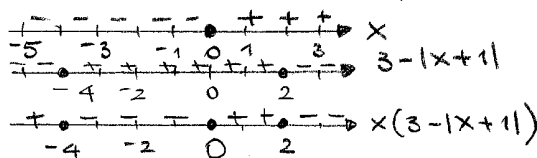
$$\Leftrightarrow 2e^x = -2x + 1 \quad \text{in } [0, 1], \text{ e}$$

questa eq. non ha soluzioni (leggendo dal grafico), e quindi $f(x)$ è ben definita su $[0, 1]$. $\square$

FILA (D)

1) $\cdot \times (3 - |x+1|) < 0$: Vediamo che si può dedurre il segno di $3 - |x+1|$

anche semplicemente dal grafico



$$\underline{S =]-4, 0[\cup]2, +\infty[;}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad 2^{x+1} \cdot 2^{4x^2-4} &> \left(\frac{1}{16}\right)^x \Leftrightarrow 2^{x+1+4x^2-4} > 2^{-4x} \Leftrightarrow 4x^2 + x > -4x \\ &\Leftrightarrow 4x^2 + 5x > 0 \Rightarrow \underline{S =]-\infty, -\frac{5}{4}[\cup]0, +\infty[;} \end{aligned}$$

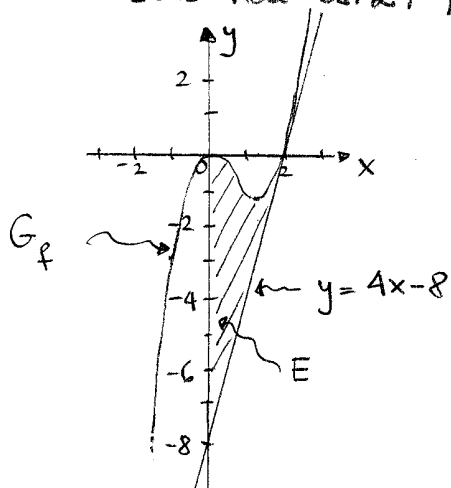
$$\bullet \quad \log_{\frac{1}{2}}(x+1) - \log_{\frac{1}{2}}(x-x^2) \leq -1 \Rightarrow \underline{S =]0, 1[} \quad (\text{vedi FILA (A) Es. 1})$$

$$\begin{aligned} 2) \text{ i) } \int_0^1 \frac{3e^x}{e^x+2} dx &= 3 \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+2} dx = 3 \left[\log|e^x+2| \right]_0^1 = 3 \left[\log(e+2) - \log 3 \right] = \\ &= \underline{3 \log\left(\frac{e+2}{3}\right)} ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-3}^{-1} \frac{3x^2 - \sqrt[3]{x} - 4}{x} dx &= \int_{-3}^{-1} \left[3x - x^{-\frac{2}{3}} - \frac{4}{x} \right] dx = \left[\frac{3x^2}{2} - \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} - 4 \log|x| \right]_{-3}^{-1} = \\ &= \left(\frac{3}{2} + 3 \right) - \left(\frac{27}{2} + 3\sqrt[3]{3} - 4 \log 3 \right) = \underline{-9 - 3\sqrt[3]{3} + 4 \log 3} ; \end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^9 n^2 \left[\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} (-2) dx \right] = \sum_{n=1}^9 n^2 (-2) \left(\frac{2}{n} \right) = -6 (1+2+\dots+8+9) = -6 \cdot 45 = \underline{-270}$$

ii) $f(x) = x^3 - 2x^2 = -(2x^2 - x^3)$, dove $2x^2 - x^3$ è la funzione data nell'es. 2) ii) FILA (A). Quindi il suo grafico è



Inoltre, l'eq. della retta tang. al grafico di f in $(2,0)$ è $y = 4x - 8$.

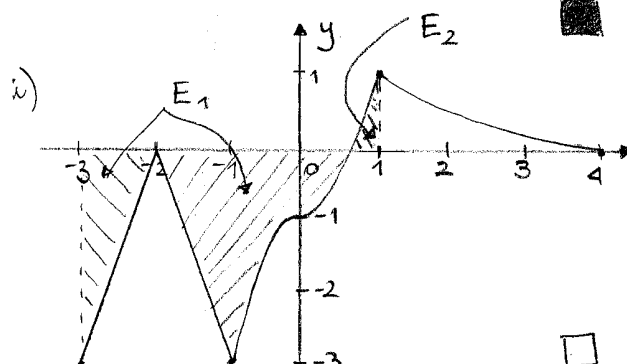
$$\text{Infine } \text{area}(E) = \int_0^2 (f(x) - 4x + 8) dx = \underline{\underline{\frac{20}{3}}}.$$

$$\text{iii) } \forall n \in \mathbb{N} \quad g_n(x) = -nx^2 + 3x = -n\left(x^2 - \frac{3}{n}x\right) = -n\left(x - \frac{3}{2n}\right)^2 + \frac{9}{4n}$$

$$\text{Si ha } M_n = \frac{9}{4n}. \text{ Ne segue } \sum_{n=1}^8 \frac{1}{M_n} = \sum_{n=1}^8 \frac{4n}{9} = \frac{4}{9}(1+2+\dots+7+8) = \frac{4}{9} \cdot 36 = 16$$

$$3) f: [-3, 4] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} -3|x+2| & \text{se } -3 \leq x \leq -1 \\ 2x^3 - 1 & \text{se } -1 < x < 1 \\ |\log_4 x - 1| & \text{se } 1 \leq x \leq 4 \end{cases}$$



ii) Basta studiare la continuità di f nei pt. $x = -1$ e $x = 1$ (negli altri

punti f è continua perché definita mediante funzioni continue).

$$\text{Ora, } \left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} [-3|x+2|] = -3 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} [2x^3 - 1] = -3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -3. \text{ Poiché } f(-1) = -3$$

si ha che f è continua in $x = -1$. Analogamente,

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} [2x^3 - 1] = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} |\log_4 x - 1| = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1. \text{ Poiché } f(1) = 1$$

si ha che f è continua anche in $x = 1$.

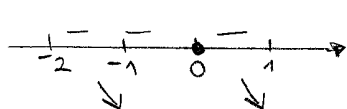
$$\text{iii) } \int_{-3}^1 f(x) dx = -\text{area}(E_1) + \text{area}(E_2) = -3 + \int_{-1}^1 (2x^3 - 1) dx = -3 + \left[\frac{2x^4}{4} - x \right]_{-1}^1 = -3 + \left[\left(\frac{1}{2} - 1 \right) - \left(\frac{1}{2} + 1 \right) \right] = -5.$$

iv) f soddisfa il teorema di Weierstrass su $[-3, 4]$, essendo continua su un intervallo chiuso e limitato.

Notiamo che $x = 1$ è pt. di massimo per f su $[-3, 4]$, mentre $x = -3$ e $x = -1$ sono pt. di minimo di f su $[-3, 4]$.

4) i) Dal teorema fondamentale del calcolo integrale sappiamo che

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [-2, 1]. \text{ Quindi}$$



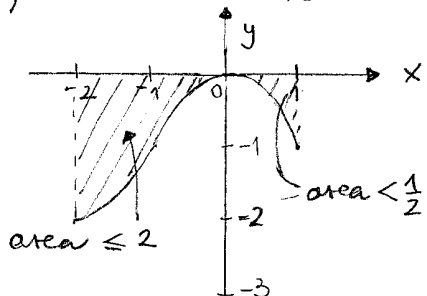
$$F'(x) = f(x) \\ F(x)$$

Quindi F è decrescente su $[-2, 1]$

(segue anche dalla definizione di F e dall'interpretazione geometrica dell'integrale).

ii) Dal punto i) segue dunque che $x = -2$ è pt. di massimo locale stretto (e globale) di F in $[-2, 1]$ e $x = 1$ è pt. di minimo loc. stretto (e globale) di F in $[-2, 1]$. $\square$

iii) Basta osservare che $F(1) = -\text{area}(E) > -2 - \frac{1}{2} = -\frac{5}{2}$



$\square$

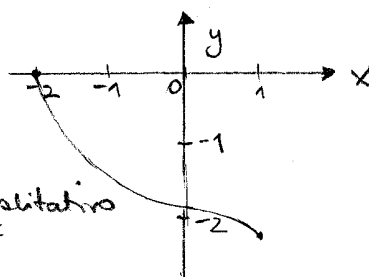
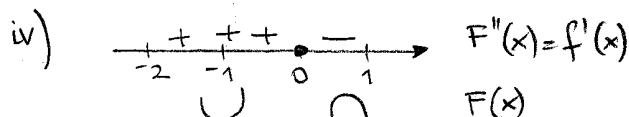
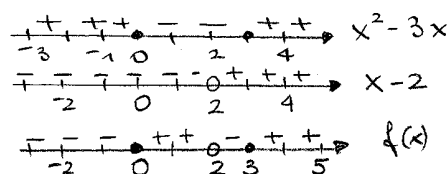


grafico qualitativo di F

5) $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x - 2}$ i) • $\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{2\} =]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$.

• segno di f



• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Osserviamo che f ha un asintoto obliquo:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x^2 - 3x}{x - 2} - x \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x^2 - 3x - x^2 + 2x}{x - 2} \right] = -1$$

L'asintoto obliquo è dato dalla retta di eq. $y = x - 1$

(questo si poteva dedurre anche, a posteriori, dal pt. ii)).

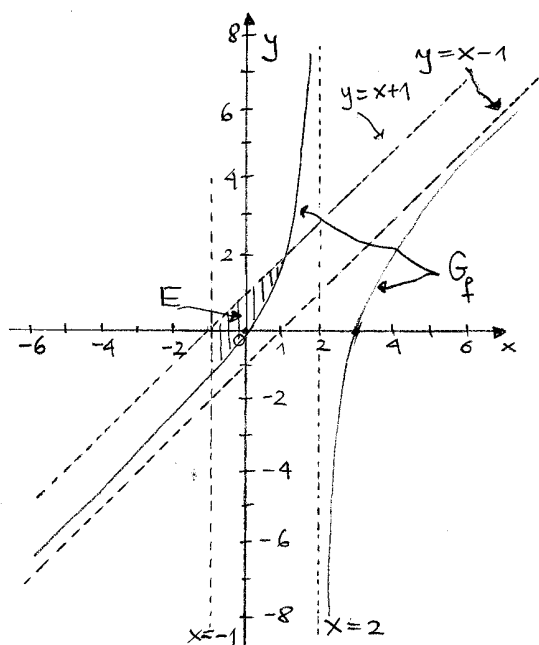
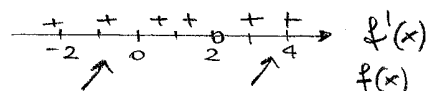
• $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$;

$x = 2$ è asintoto verticale per f .

• f è continua in $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ (rapporto di funzioni continue)

• $\text{dom } f' = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ $f'(x) = \frac{(2x-3)(x-2) - (x^2-3x)}{(x-2)^2} = \frac{2x^2 - 7x + 6 - x^2 + 3x}{(x-2)^2}$

$$= \frac{x^2 - 4x + 6}{(x-2)^2} > 0 \quad \forall x \neq 2.$$



• $\text{dom } f'' = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ $f''(x) = \frac{(2x-4)(x-2)^2 - (x^2-4x+6)2(x-2)}{(x-2)^3}$

$$= \frac{2x^2 - 8x + 8 - 2x^2 + 8x - 12}{(x-2)^3} = \frac{-4}{(x-2)^3}$$

ii) Basta osservare che

$$x-1 - \frac{2}{x-2} = \frac{(x-1)(x-2) - 2}{x-2} = \frac{x^2 - 3x + 2 - 2}{x-2} = \frac{x^2 - 3x}{x-2} = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}. \quad \square$$

iii) $\frac{x^2-3x}{x-2} = x+1 \Leftrightarrow \frac{x^2-3x-x^2+x+2}{x-2} = 0 \Leftrightarrow \frac{-2x+2}{x-2} = 0 \Rightarrow \underline{x=1}$

$$\begin{aligned} \text{area}(E) &= \int_{-1}^1 (x+1 - f(x)) dx = \int_{-1}^1 \left(\cancel{x+1} - \cancel{x+1} + \frac{2}{x-2} \right) dx = \int_{-1}^1 \left(2 + \frac{2}{x-2} \right) dx \\ &= \left[2x + 2 \log|x-2| \right]_{-1}^1 = 2 - (-2 + 2 \log 3) = \underline{4 - 2 \log 3}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

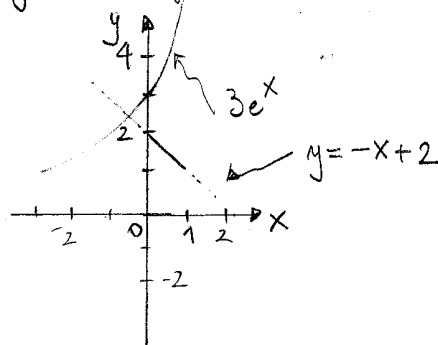
6) Osserviamo che $f(x) = \frac{1}{g(x)}$, dove $g(x) = 3e^x + x - 2$ su $[0, 1]$.

Ora $g(0) = 3 - 2 = 1 > 0$ e $g(1) = 3e - 1 > 0$. Poiché $g'(x) = 3e^x + 1 > 0$

$\forall x \in [0, 1]$, si ha che $g(x)$ è crescente su $[0, 1]$ e quindi $g(x) > 0$

$\forall x \in [0, 1]$. Possiamo asserire che $f(x)$ è ben definita su $[0, 1]$. \(\blacksquare\)

Spiegazione "grafica": basta osservare che $3e^x + x - 2 > 0$ su $[0, 1]$



$\Leftrightarrow 3e^x = -x + 2$ su $[0, 1]$, e questa eq. non ha soluzione (leggendo dal grafico), e quindi $f(x)$ è ben definito su $[0, 1]$. \(\square\)