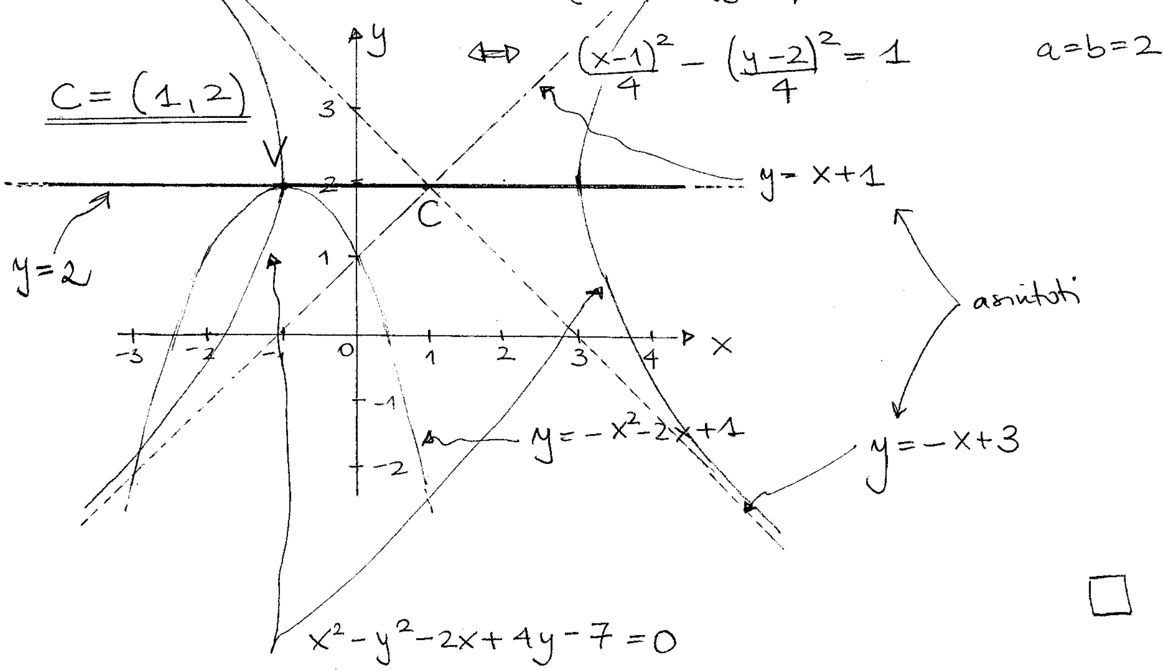
Università degli Studi di Trento − Facoltà di Scienze Cognitive
CdL in Scienze e Tecniche di Psicologia Cognitiva
CdL in Interfacce e Tecnologie della Comunicazione − CdL in Filosofia
SECONDO APPELLO DI ANALISI MATEMATICA (CON ELEMENTI DI ALGEBRA)
a.a. 2011−2012 − Rovereto, 23 gennaio 2012

FILA (B)

1) i) $y = -x^2-2x+1 = -(x^2+2x)+1$
$= -(x+1)^2+2 \qquad \underline{V=(-1,2)}$

$x^2-y^2-2x+4y-7=0 \iff (x^2-2x)-(y^2-4y)-7=0$
$\iff (x-1)^2-1-(y-2)^2+4-7=0$
$\iff (x-1)^2-(y-2)^2=4$
$\iff \frac{(x-1)^2}{4}-\frac{(y-2)^2}{4}=1 \qquad a=b=2$

$\underline{C=(1,2)}$

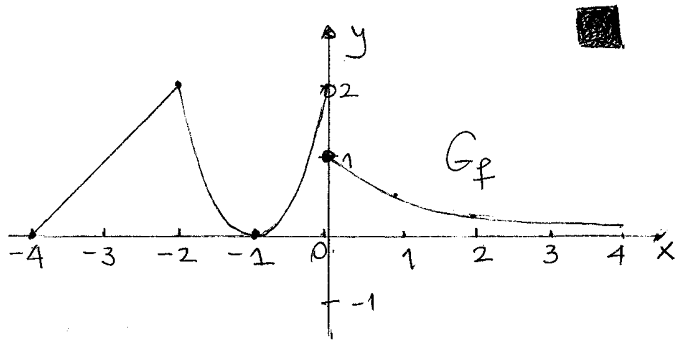


ii) $\underline{y=2}$ è l'eq. della retta r passante per V e C.

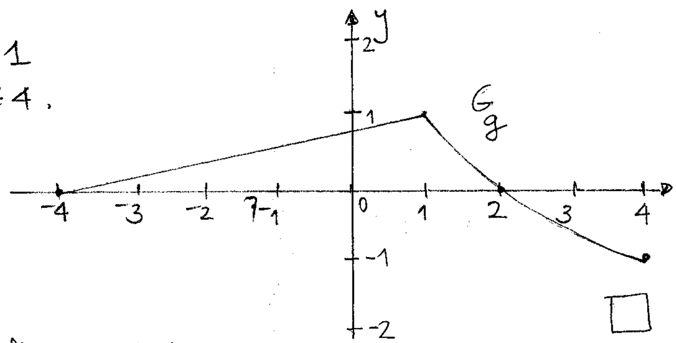
iii) $\underline{x=1}$ è l'eq. della retta perpendicolare alla retta r e passante per C.

2) i) $f : [-4,4] \to \mathbb{R}$

$$f(x)=\begin{cases} x+4 & \text{se } -4\le x\le -2,\\ 2(x+1)^2 & \text{se } -2<x<0\\ 2^{-x} & \text{se } 0\le x\le 4\,; \end{cases}$$



$$g(x)=\begin{cases} \frac{1}{5}x+\frac{4}{5} & \text{se } -4\le x<1 \\ 1-\log_2 x & \text{se } 1\le x\le 4. \end{cases}$$



ii) $f([-4,4]) = \underline{\underline{[0,2]}}$.

Siano $x_1=-4$, $x_2=-1$. Allora $x_1\neq x_2$

ma $f(x_1)=f(x_2)=0$. Quindi f non è iniettiva.

iii) f non soddisfa il teorema di Weierstrass, poiché f non è continua in $x=0$. Si ha $\lim_{x\to 0^-} f(x)=2 \neq \lim_{x\to 0^+} f(x) = 1 = f(0)$.

Osserviamo che però esistono lo stesso il massimo e il minimo di f su $[-4,4]$. Si ha

$\max_{x\in[-4,4]} f(x) = 2$, $x=-2$ pt. di massimo;

$\min_{x\in[-4,4]} f(x) = 0$, $x=-4$, $x=-1$ sono pt. di minimo.

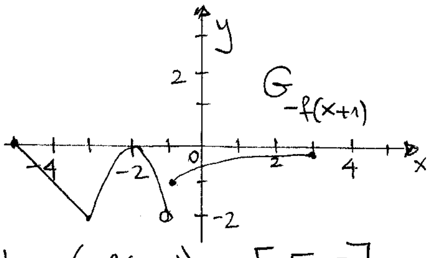
iv) $\sum_{n=1}^{4} f(-\frac{1}{n}) = f(-1)+f(-\frac{1}{2})+f(-\frac{1}{3})+f(-\frac{1}{4}) =$
$= 0 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{3}{4}\right)^2 = 2\left(\frac{1}{4}+\frac{4}{9}+\frac{9}{16}\right) = \underline{\underline{\frac{181}{72}}}$.

v) Se $k<-1$ o $k>1$ $\nexists$ sono soluzioni dell'eq. $g(x)=k$;

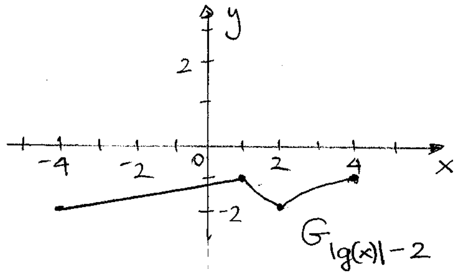
se $-1\le k<0$ o $k=1$, $\exists$ una soluzione dell'eq. $g(x)=k$;

se $0\le k<1$, $\exists$ sono due soluzioni dell'eq. $g(x)=k$.

vi)



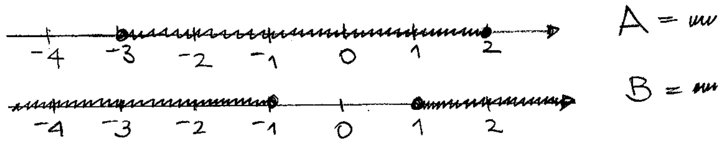
$\mathrm{dom}(-f(x+1)) = [-5,3]$.



$\mathrm{dom}(|g(x)|-2) = [-4,4]$

3) i) $A=\{x\in\mathbb{R} : 3^{x^2+x+1}\le 3^7\} \underset{3^x \nearrow}{=} \{x\in\mathbb{R} : x^2+x+1\le 7\} = \{x\in\mathbb{R} : x^2+x-6\le 0\}$
$= \underline{\underline{[-3,2]}}$

$$B = \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1\} = \underline{\underline{]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[}}$$



ii) $A \cap B = \underline{\underline{[-3,-1] \cup [1,2]}}$ A∩B non è un intervallo! (è unione di due intervalli disgiunti)

$$A \setminus B = \underline{\underline{]-1, 1[}}.$$

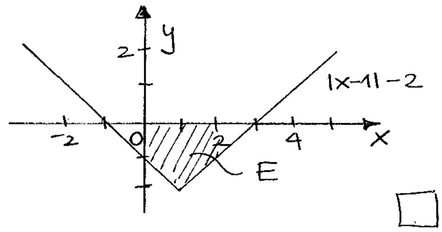
4) i) $$\int_0^1 \frac{x^2}{x^3+2}\,dx = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{3x^2}{x^3+2}\,dx = \frac{1}{3}\Big[\log|x^3+2|\Big]_0^1 = \frac{1}{3}(\log 3 - \log 2) =$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{3}\log\frac{3}{2}}}.$$

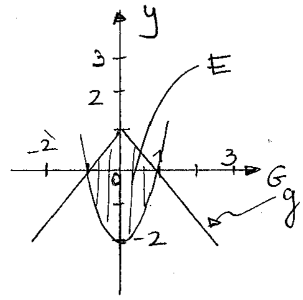
$$\int_1^2 \left(\frac{1}{x^2} + \sqrt[4]{x+1} + 3^x\right)dx = \left[-\frac{1}{x} + \frac{(x+1)^{5/4}}{5/4} + \frac{3^x}{\log 3}\right]_1^2 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{4}{5}\cdot 3^{5/4} + \frac{9}{\log 3}\right) -$$

$$-\left(-1 + \frac{4}{5}2^{5/4} + \frac{3}{\log 3}\right) = \underline{\underline{\frac{1}{2} + \frac{12}{5}\sqrt[4]{3} - \frac{8}{5}\sqrt[4]{2} + \frac{6}{\log 3}}}.$$

$$\int_0^2 (|x-1|-2)\,dx = -\text{area}(E) = \underline{\underline{-3}}.$$



ii)



$$f(x) = 2(x^2-1)$$

$$\text{area}(E) = 2\int_0^1 (g(x) - f(x))\,dx = 2\int_0^1 (-x+1-2x^2+2)\,dx$$

$$= 2\int_0^1 (-2x^2 - x + 3)\,dx = 2\left[-2\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 3x\right]_0^1 =$$

$$= 2\left[-\frac{2}{3} - \frac{1}{2} + 3\right] = 2\left[\frac{-4-3+18}{6}\right] = \underline{\underline{\frac{11}{3}}}$$

iii) $$\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{(k+1)^2} - \frac{1}{k^2}\right) = \left(\cancel{\frac{1}{4}} - 1\right) + \left(\cancel{\frac{1}{9}} - \cancel{\frac{1}{4}}\right) + \left(\frac{1}{16} - \cancel{\frac{1}{9}}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{121} - \cancel{\frac{1}{100}}\right)$$

$$= -1 + \frac{1}{121} = \underline{\underline{-\frac{120}{121}}}.$$

5) i) $f(x)=x^4+2x^3$ • $\mathrm{dom} f=\mathbb{R}=]-\infty,+\infty[$

• $f(x)=x^3(x+2)$

• $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

• f è continua essendo somma di funzioni continue su $\mathbb{R}$.

	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,0)$	0	$(0,+\infty)$
x^3	$-$		$-$	0	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

• $\mathrm{dom} f'=\mathbb{R}$ $\quad f'(x)=4x^3+6x^2=2x^2(2x+3)$

$f'(x)=0 \iff x=0,\ x=-\frac{3}{2}$ sono pt. critici per f

$f(0)=0 \qquad f(-\frac{3}{2})=-\frac{27}{8}(-\frac{3}{2}+2)=-\frac{27}{16}=\sim -1.7$

$x=\frac{3}{2}$ è un pt. di minimo loc. stretto per f

	$(-\infty,-\frac{3}{2})$	$-\frac{3}{2}$	$(-\frac{3}{2},0)$	0	$(0,+\infty)$
x^2	$+$		$+$	0	$+$
$2x+3$	$-$	0	$+$		$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
f	$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$

• $\mathrm{dom} f''=\mathbb{R}$ $\quad f''(x)=12x^2+12x$

$=12x(x+1)$

	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,+\infty)$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cup$		$\cap$		$\cup$

$\square$

ii) $(-2,f(-2))=(-2,0) \qquad f'(-2)=-8$

$y=0-8(x+2) \Rightarrow \underline{\underline{y=-8x-16}}$ è l'eq. della retta tg al grafico di f in $(-2,0)$

$(1,f(1))=(1,3) \qquad f'(1)=10$

$y=3+10(x-1) \Rightarrow \underline{\underline{y=10x-7}}$ è l'eq. della retta tg. al grafico di f in $(1,3)$

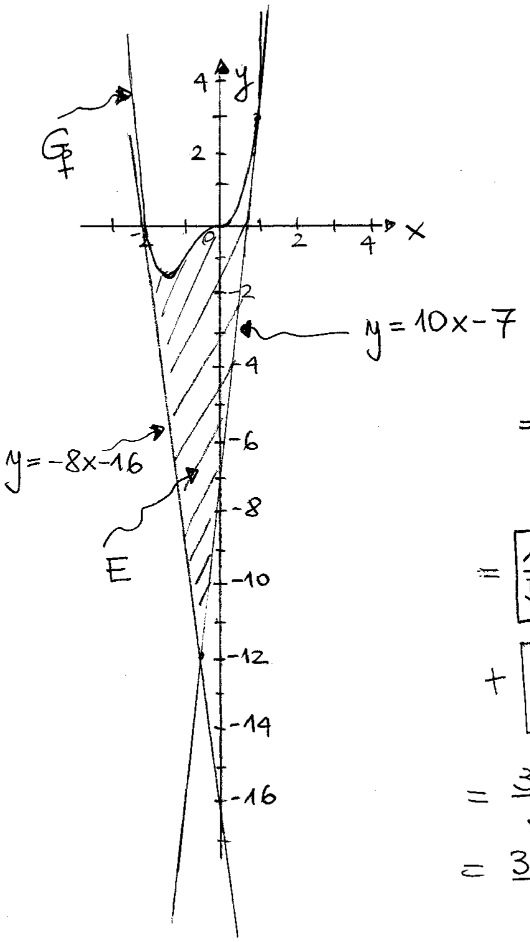
Per la rappresentazione grafica vedi pag. 5. $\square$

iii) Notiamo che $y=-8x-16$ e $y=10x-7$ si intersecano in:

$$\begin{cases} y=10x-7 \\ -8x-16=10x-7 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} y=10x-7 \\ 18x=-9 \end{matrix} \Rightarrow x=-\frac{1}{2}\quad y=-12$$

allora

$$\mathrm{area}(E)=\int_{-2}^{-1/2}\left(f(x)-(-8x-16)\right)dx+\int_{-1/2}^{1}\left(f(x)-(10x-7)\right)dx=$$



$$= \int_{-2}^{-1/2} \left(x^4 + 2x^3 + 8x + 16 \right) dx +$$

$$+ \int_{-1/2}^{1} \left(x^4 + 2x^3 - 10x + 7 \right) dx =$$

$$= \left[\frac{x^5}{5} + \cancel{2}\frac{x^4}{\cancel{4}_2} + \overset{4}{\cancel{8}}\frac{x^2}{\cancel{2}} + 16x \right]_{-2}^{-1/2} + \left[\frac{x^5}{5} + \cancel{2}\frac{x^4}{\cancel{4}_2} - \overset{5}{\cancel{10}}\frac{x^2}{\cancel{2}} + 7x \right]_{-1/2}^{1}$$

$$= \left[\cancel{\frac{1}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^5} + \cancel{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^4} + \cancel{1} - 8 \right] - \left[\frac{1}{5}(-2)^5 + \frac{(-2)^4}{2} + 4(-2)^2 - 32 \right]$$

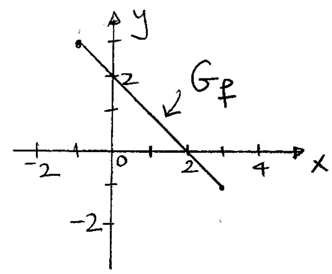
$$+ \left[\frac{1}{5} + \frac{1}{2} - 5 + \cancel{7} \right] - \left[\cancel{\frac{1}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^5} + \cancel{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^4} - \frac{5}{4} - \frac{7}{2} \right]$$

$$= \frac{33}{5} - 8 - 16 + 32 + 4 - 5 + \frac{5}{4}$$

$$= \frac{33}{5} + 6 + \frac{9}{4} = \underline{\underline{\frac{297}{20}}}$$

$\blacksquare$

6)



<u>Es:</u> $f(x) = -x + 2$ soddisfa i) ii) + iii).

i) infatti $f(x) > 0$ in $[-1, 2[$ $\;f(2) = 0$

$f(x) < 0$ in $]2, 3]$;

ii) $f'(x) = -1$ in $]-1, 3[$;

iii) $\displaystyle\int_{-1}^{3} f(x)\,dx = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4$.

$\blacksquare$

FILA C

1) i) $y = x^2 - 2x - 1 = (x-1)^2 - 2$ $\qquad \underline{\underline{V = (1, -2)}}$

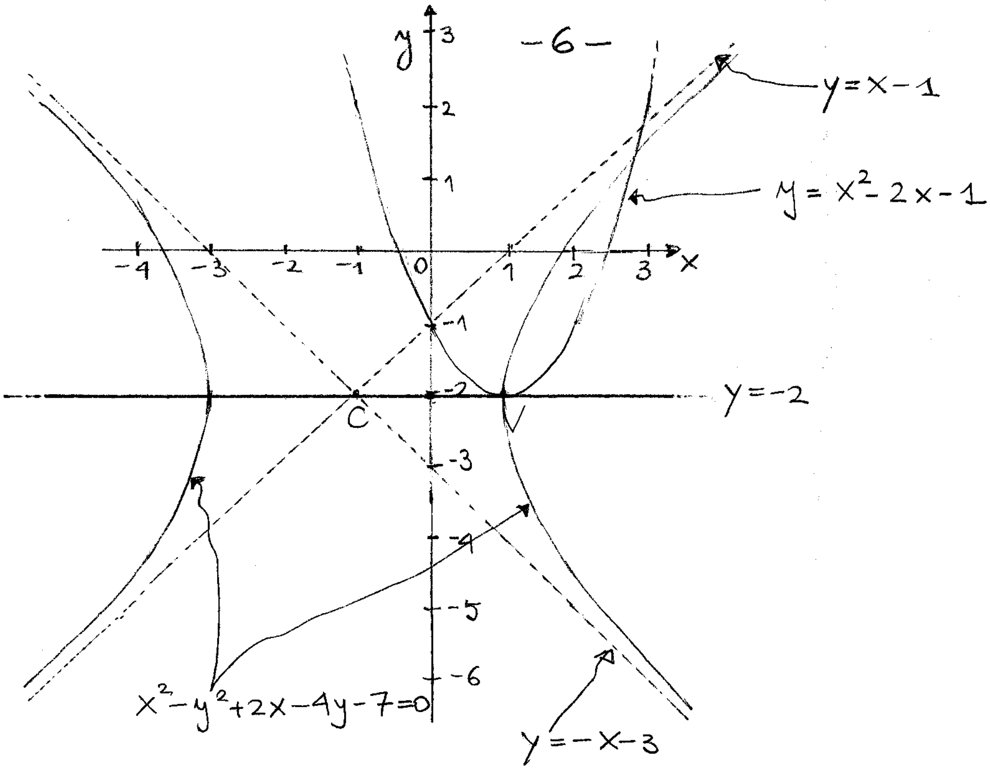
$x^2 - y^2 + 2x - 4y - 7 = 0 \iff (x^2 + 2x) - (y^2 + 4y) - 7 = 0$

$\iff (x+1)^2 - 1 - (y+2)^2 + 4 - 7 = 0$

$\iff (x+1)^2 - (y+2)^2 = 4$

$\iff \dfrac{(x+1)^2}{4} - \dfrac{(y+2)^2}{4} = 1 \qquad a = b = 2$

$\underline{\underline{C = (-1, -2)}}$

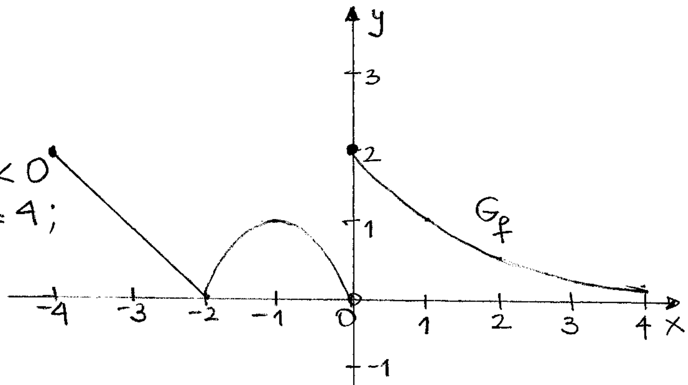


ii) $\underline{\underline{y=-2}}$ è l'eq. della retta r passante per V e C.

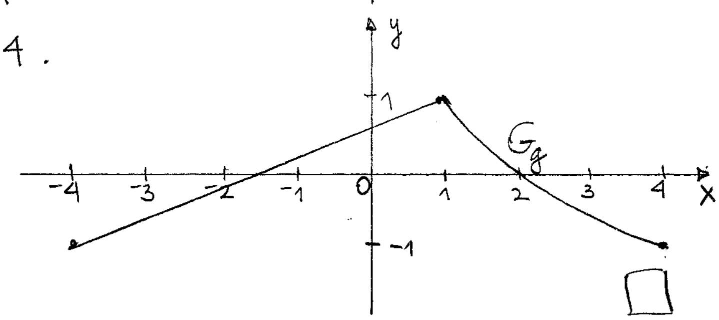
iii) $\underline{\underline{x=-1}}$ è l'eq. della retta perpendicolare alla retta r e passante per C.

2) i) $f:[-4,4] \to \mathbb{R}$

$$f(x)=\begin{cases} -x-2 & \text{se } -4\le x\le -2 \\ -(x+1)^2+1 & \text{se } -2<x<0 \\ 2^{-x+1} & \text{se } 0\le x\le 4; \end{cases}$$



$$g(x)=\begin{cases} \frac{2}{5}x+\frac{3}{5} & \text{se } -4\le x<1 \\ 1-\log_2 x & \text{se } 1\le x\le 4. \end{cases}$$



ii) $f([-4,4]) = \underline{[0,2]}$.

Siano $x_1=-4$, $x_2=0$. Allora $x_1\neq x_2$, ma $f(x_1)=f(x_2)=2$. Quindi f non è iniettiva.

iii) f non soddisfa il teorema di Weierstrass, poiché f non

è continua in $x=0$. Si ha $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0 \neq \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 2 = f(0)$.
Osserviamo che però esistono lo stesso il massimo e il minimo di f su $[-4,4]$. Si ha

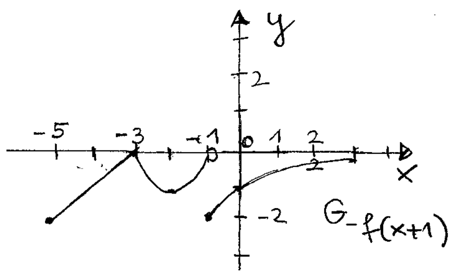
$\max\limits_{x\in[-4,4]} f(x) = 2$, $x=-4$, $x=0$ pt. di massimo;

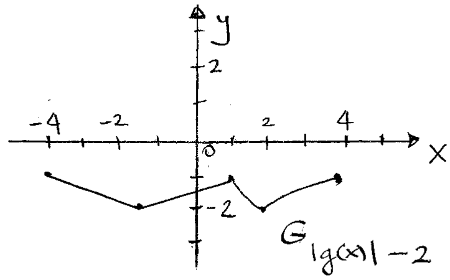
$\min\limits_{x\in[-4,4]} f(x) = 0$, $x=-2$ è un pt. di minimo. $\square$

iv) $\sum\limits_{n=1}^{4} f\left(-\frac{1}{n}\right) = f(-1) + f\left(-\frac{1}{2}\right) + f\left(-\frac{1}{3}\right) + f\left(-\frac{1}{4}\right) = 1 + \frac{3}{4} + \frac{5}{9} + \frac{7}{16} = \underline{\underline{\frac{395}{144}}}$ $\square$

v) se $k<-1$ o $k>1$, $\nexists$ sono soluzioni dell'eq. $g(x)=k$;
se $-1 \le k < 1$, $\exists$ sono due soluzioni dell'eq. $g(x)=k$;
se $k=1$, $\exists$ una soluzione dell'eq. $g(x)=k$. $\square$

vi)



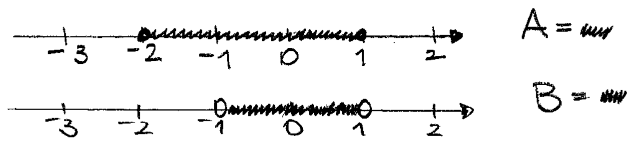


$\text{dom}\left(-f(x+1)\right) = [-5,3]$. $\text{dom}\left(|g(x)|-2\right) = [-4,4]$

3) i) $A = \{x\in\mathbb{R} : 2^{x^2}\cdot 2^{x+1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \le 0\} \underset{2^x \uparrow}{=} \{x\in\mathbb{R} : x^2+x+1 \le 3\} =$

$= \{x\in\mathbb{R} : x^2+x-2 \le 0\} = \underline{\underline{[-2,1]}}$.

$B = \{x\in\mathbb{R} : |x|<1\} = \underline{\underline{]-1,1[}}$



$\square$

ii) $A\cap B = \underline{\underline{]-1,1[}}$

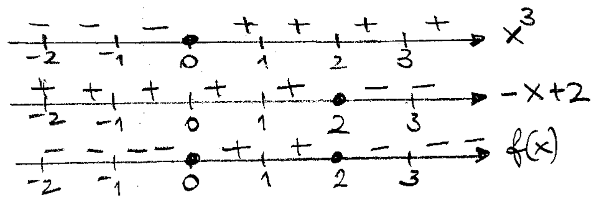
$A\setminus B = \underline{\underline{[-2,-1]\cup\{1\}}}$ $A\setminus B$ non è un intervallo!

4) Vedi, Seconda Prova Intermedia 23/01/12, FILA (A), Es. 2.

5) i) $f(x) = -x^4 + 2x^3$ • $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

• $f(x) = x^3(-x+2)$

• $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

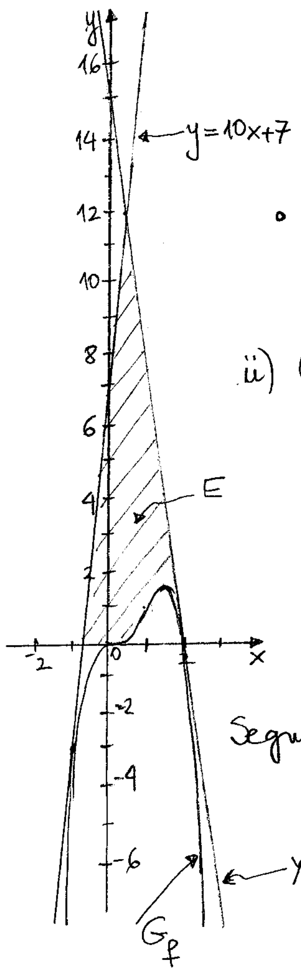


• f è continua su $\mathbb{R}$ essendo somma di funzioni continue su $\mathbb{R}$.

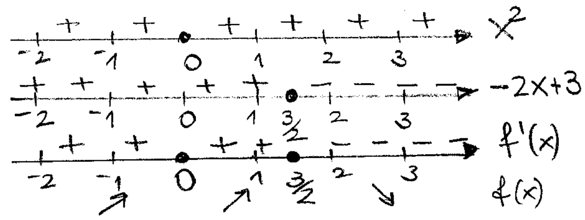
• $\operatorname{dom} f' = \mathbb{R}$ $\quad f'(x) = -4x^3 + 6x^2 = 2x^2(-2x+3)$

$f'(x) = 0 \iff x = 0,\ x = 3/2$, sono pt. critici per f con

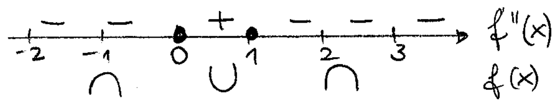
$f(0) = 0, \quad f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{27}{16} = \sim 1.7$



$x = 3/2$ è un pt. di massimo loc. stretto per f.



• $\operatorname{dom} f'' = \mathbb{R}$ $\quad f''(x) = -12x^2 + 12x = 12x(-x+1)$



ii) $(-1, f(-1)) = (-1, -3)$ $\quad f'(-1) = 10$

$y = -3 + 10(x+1) \Rightarrow \underline{\underline{y = 10x + 7}}$ è l'eq. della retta tg. al grafico di f in $(-1,-3)$;

$(2, f(2)) = (2, 0)$ $\quad f'(2) = -8$

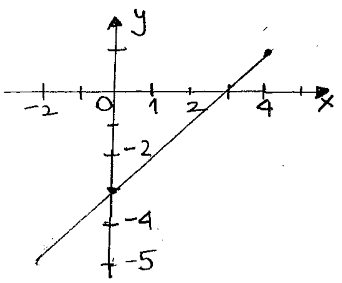
$y = 0 - 8(x-2) \Rightarrow \underline{\underline{y = -8x + 16}}$ è l'eq. della retta tg. al grafico di f in $(2,0)$.

Segue che $S = \left(\frac{1}{2}, 12\right)$ è il pt. di intersezione di queste due rette.

$\leftarrow y = -8x + 16$

$$\text{area}(E) = \int_{-1}^{1/2} (10x + 7 - f(x))\,dx + \int_{1/2}^{2} (-8x + 16 - f(x))\,dx = \underline{\underline{\frac{297}{20}}}.$$

vedi SPI, 23/01/2012 Es. 5 iii) FILA (A). ■

6) 

Es.: $f(x) = x - 3$ soddisfa i) ii) + iii):

i) Infatti $f(x) < 0$ su $[-2, 3[$, $f(3) = 0$, $f(x) > 0$ su $]3, 4]$;

ii) $f'(x) = 1$ su $]-2, 4[$;

iii) $\int_{-2}^{4} f(x)\,dx = -\frac{25}{2} + \frac{1}{2} = -12$. ■