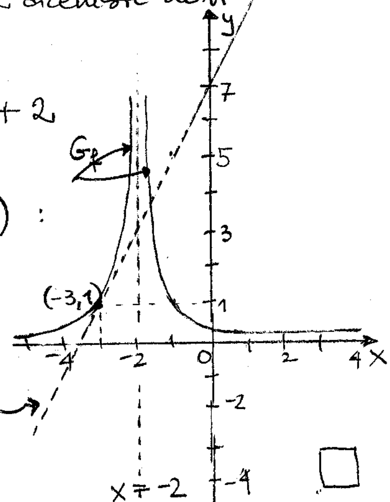
Università degli Studi di Trento – Facoltà di Scienze Cognitive
CdL in Scienze e Tecniche di Psicologia Cognitiva
CdL in Interfacce e Tecnologie della Comunicazione – CdL in Filosofia
VERIFICHE SETTIMANALE DI ANALISI MATEMATICA (CON ELEMENTI DI ALGEBRA)
a.a. 2011 – 2012 — Rovereto, 28 novembre – 2 dicembre 2011

1) i) $f(x)=\dfrac{1}{(x+2)^2}$ $\qquad f'(x) = -\dfrac{2}{(x+2)^3}$ $\qquad f'(-3) = +2$



Eq. della retta tg. al grafico di f in $(-3,1)$:

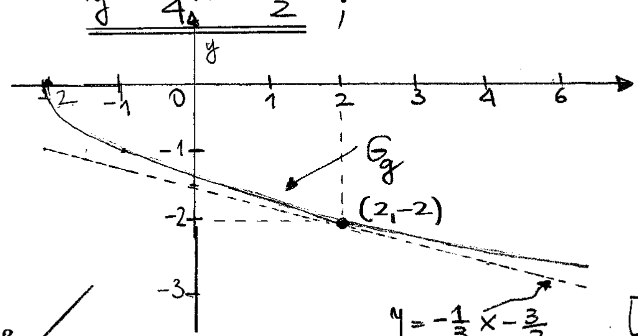
$y = 1 + 2(x+3) \Rightarrow \underline{\underline{y = +2x+7}}$;

ii) $g(x) = -\sqrt{x+2}$ $\qquad g'(x) = -\dfrac{1}{2\sqrt{x+2}}$

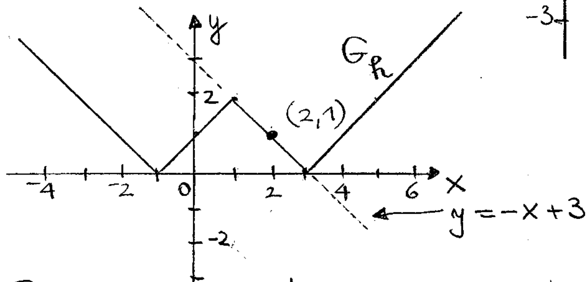
$g'(2) = -\dfrac{1}{2\cdot 2} = -\dfrac{1}{4}$

Eq. della retta tg. al grafico di g in $(2,-2)$:

$y = -2 - \frac{1}{4}(x-2) \Rightarrow \underline{\underline{y = -\frac{1}{4}x - \frac{3}{2}}}$;



iii) $h(x) = ||x-1|-2|$

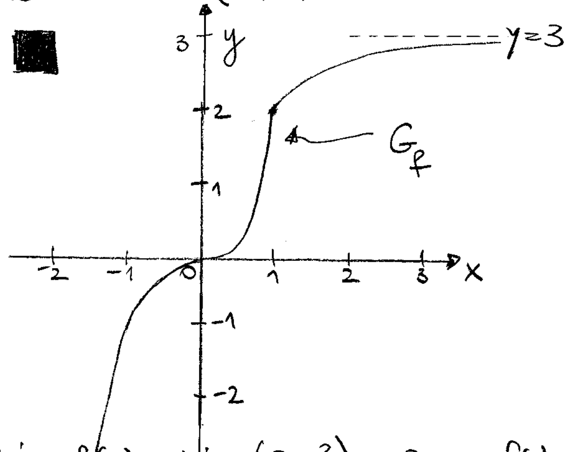


Eq. della retta tg. al grafico di h in $(2,1)$:

$\underline{\underline{y = -x+3}}$.

2) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{se } x \le 0 \\ 2x^2 & \text{se } 0 < x \le 1 \\ -\frac{1}{x}+3 & \text{se } x > 1. \end{cases}$$



i) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}(-x^2) = 0$ $\qquad \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(2x^2) = 0$ e $f(0)=0$.

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (2x^2) = 2, \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \left(-\frac{1}{x}+3\right) = 2 \quad$ e $f(1)=2$.

Quindi f è continua in $x=0$ ed è continua in $x=1$.

ii) $\lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h^2-0}{h} = \lim_{h\to 0^-}(-h) = 0$.

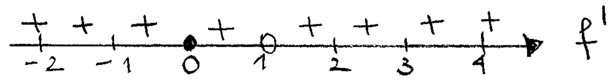
$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{2h^2-0}{h} = \lim_{h\to 0^+}(2h) = 0$.

Abbiamo quindi che $\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h}$ $\exists$ finito. Ne segue che f è derivabile in $x=0$ e si ha $f'(0)=0$.

iii) $\lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{2(h+1)^2-2}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{2h^2+4h+\cancel{2}-\cancel{2}}{h} = 4$

$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{-\frac{1}{h+1}+3-2}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\frac{-\cancel{1}+h+\cancel{1}}{h+1}}{h} = 1$

Possiamo concludere che $\nexists \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ e quindi f non è derivabile in $x=1$.

iv) 

3) i) a) $(3+x^4-x^{-2})' = \underline{\underline{4x^3+2x^{-3}}}$;

$\left(\frac{x+x^2}{x^3+2}\right)' = \underline{\underline{\frac{(1+2x)(x^3+2)-(x+x^2)\cdot 3x^2}{(x^3+2)^2}}}$;

$\left(\frac{1}{4-3^x}\right)' = \underline{\underline{\frac{+\,3^x \log 3}{(4-3^x)^2}}}$;

$\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}-1}\right)' = \underline{\underline{\frac{\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}(\sqrt{x}-1) - \sqrt[3]{x}\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}{(\sqrt{x}-1)^2}}}$;

b) $\left[(e^{2x}+x)\log_4 x\right]' = \underline{\underline{(2e^{2x}+1)\log_4 x + (e^{2x}+x)\cdot\frac{1}{x\log 4}}}$;

$\left[\sqrt[4]{x+1} + 2^{1-x}\right]' = \underline{\underline{\frac{1}{4}(x+1)^{-\frac{3}{4}} - 2^{1-x}\log 2}}$.

ii) $\left[(x^2+e^{-x})^{-1}\right]' = \underline{\underline{-(x^2+e^{-x})^{-2}\cdot(2x-e^{-x})}}$;

$\left(e^{x^2-x}\right)' = \underline{\underline{e^{x^2-x}\cdot(2x-1)}}$;

$$\left[\log(4x+e^x)^3\right]' = \frac{1}{(4x+e^x)^{\cancel{3}}} \cdot 3\cancel{(4x+e^x)^2}\cdot(4+e^x).$$

4) i) $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \underline{\underline{1}}$; $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = \underline{\underline{2}}$;

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \underline{\underline{2}}$; $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \underline{\underline{-\infty}}$.

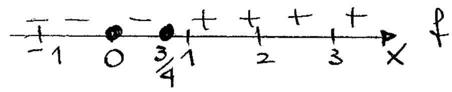
ii) $x=-4$, $x=-1$ sono pt. di minimo locali di f

$x=-2$, $x=0$, $x=3$ sono pt. di massimo locale di f.

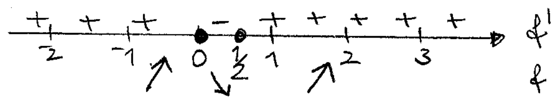
iii) $(-1,1)$, $(1,0)$, $(3,1)$ sono i pt. del grafico di f in cui la retta tg. al grafico risulta essere orizzontale.

5) $\boxed{f(x) = 4x^3 - 3x^2}$

- dom $f = \mathbb{R}$
- $f(x) = x^2(4x-3)$



- $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$
- f è continua in $\mathbb{R}$, poiché somma di funzioni continue.
- dom $f' = \mathbb{R}$ $\quad f'(x) = 12x^2 - 6x = 6x(2x-1)$



$x=0$, $x=\frac{1}{2}$ sono pt. critici per f, e si ha che

$x=0$ è un pt. di massimo loc. stretto, e

$f(0) = \underline{\underline{0}}$;

$x=\frac{1}{2}$ è un pt. di minimo loc. stretto, e

$f\left(\frac{1}{2}\right) = 4\cdot\frac{1}{8} - 3\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{3}{4} = \underline{\underline{-\frac{1}{4}}}$;

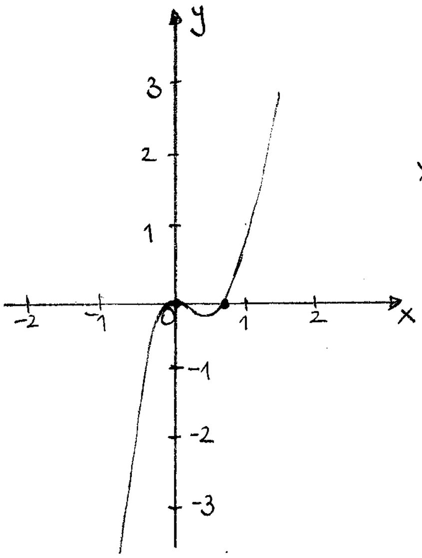
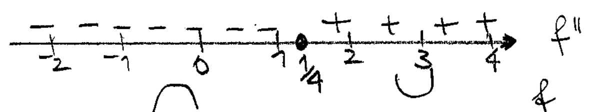


grafico qualitativo di f

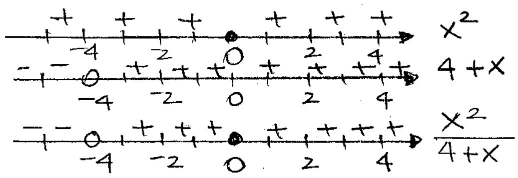
- dom $f'' = \mathbb{R}$ $\quad f''(x) = 24x - 6 = 6(4x-1)$



$x = 1/4$ pt. di flesso.

$$\boxed{f(x) = \frac{x^2}{4+x}}$$

- $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}\setminus\{-4\} = \,]-\infty,-4[\,\cup\,]-4,+\infty[$
- segno di f

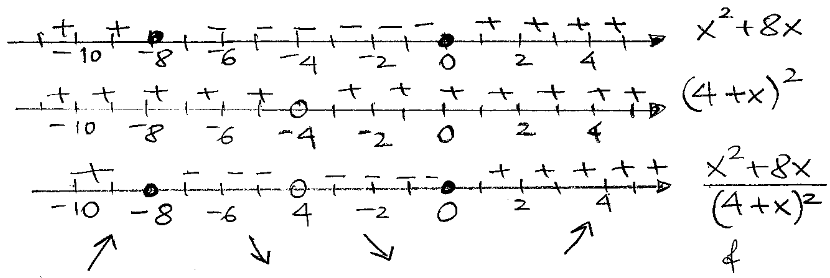


- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to-4^-} f(x) = -\infty$ $\underline{\underline{x=-4}}$ asintoto verticale per f

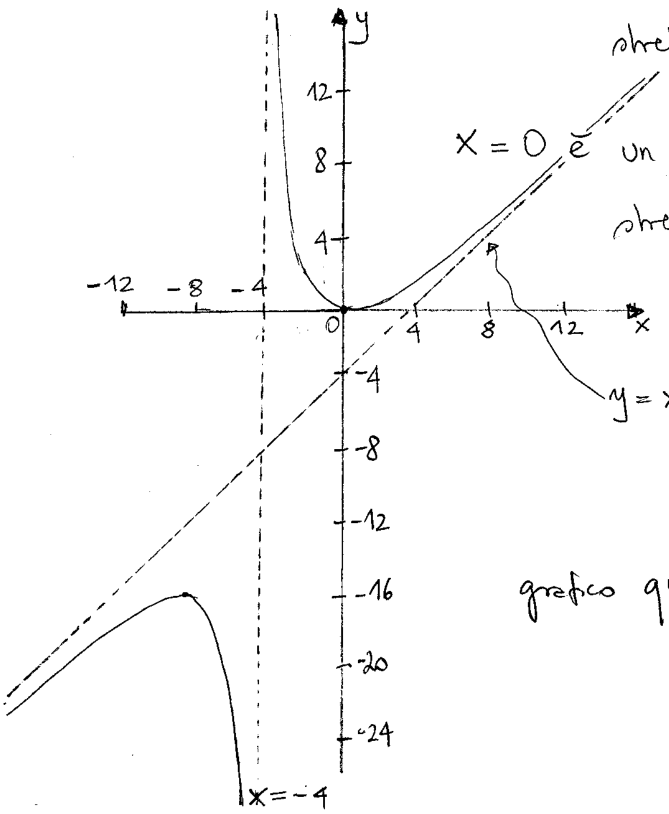
  $\lim_{x\to-4^+} f(x) = +\infty$

  $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Si ha che $\underline{\underline{y = x-4}}$ è asintoto obliquo per f, per $x \to -\infty$ $(+\infty)$

- f è continua in $\mathbb{R}\setminus\{-4\}$, essendo rapporto di funzioni continue.
- $\operatorname{dom} f' = \mathbb{R}\setminus\{-4\}$ $\quad f'(x) = \dfrac{2x(4+x) - x^2}{(4+x)^2} = \dfrac{x^2+8x}{(4+x)^2}$



$x=-8$ è un pt. critico per f ; è un pt. di max. loc. stretto e $f(-8) = \dfrac{64}{-4} = \underline{\underline{-16}}$



$x = 0$ è un pt. critico per f ; è un pt. di min. loc. stretto e $f(0) = \underline{0}.$

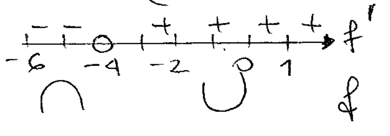
- $\operatorname{dom} f'' = \mathbb{R}\setminus\{-4\}$

$$f''(x) = \frac{(2x+8)(4+x)^{\cancel{2}} - (x^2+8x)\cdot 2\cancel{(4+x)}}{(4+x)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$= \frac{\cancel{16x} + \cancel{2x^2} + 32 - \cancel{2x^2} - \cancel{16x}}{(4+x)^3}$$

$$= \frac{32}{(4+x)^3}$$

grafico qualitativo di f



$\square$

$\boxed{f(x) = (x+1)\,e^{-x}}$

- $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$
- $(x+1)e^{-x} = \dfrac{(x+1)}{e^{x}}$

$x+1$: $-$ $-$ (−2, −1) • $+$ $+$ $+$ (0, 1)

(anche segno di f poiché $e^x > 0$)

- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

$\Rightarrow y = 0$ è asintoto orizz. per f, per $x \to +\infty$.

- f è continua in $\mathbb{R}$, poiché prodotto di funzioni continue.
- $\operatorname{dom} f' = \mathbb{R} \qquad f'(x) = e^{-x} - (x+1)e^{-x}$
$$= -xe^{-x}$$

f': $+$ $+$ $+$ (−2, −1) • (0) $-$ $-$ $-$ (1, 2)

f: $\nearrow$ $\searrow$

$x = 0$ è pt. critico per f, e si ha $f(0) = 1$

- $\operatorname{dom} f'' = \mathbb{R} \qquad f''(x) = -e^{-x} + xe^{-x} = (x-1)e^{-x}$

f'': $-$ $-$ $-$ $-$ (−2, −1, 0) • (1) $+$ $+$ (2)

f: $\cap$ $\cup$

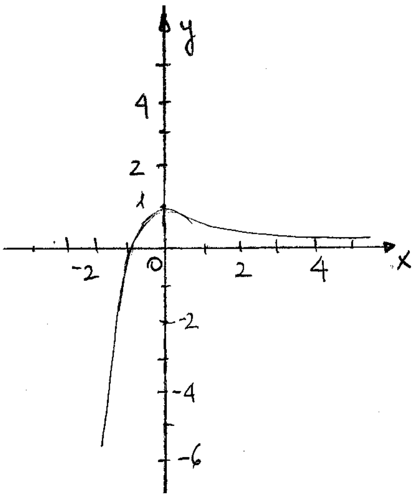


grafico qualitativo per f

$x = 1$ pt. di flesso per f. $\square$

$\boxed{f(x) = \log\left(\dfrac{x}{x+2}\right)}$

- $\operatorname{dom} f = \left\{ x \in \mathbb{R} : \dfrac{x}{x+2} > 0 \right\} =]-\infty, -2[\,\cup\,]0, +\infty[$

x: $-$ $-$ $-$ (−4, −2) • (0) $+$ $+$ $+$ $+$ (2, 4)

$x+2$: $-$ $-$ (−4) • (−2) $+$ $+$ $+$ $+$ $+$ (0, 2, 4)

$\dfrac{x}{x+2}$: $+$ $+$ (−4) • (−2) $-$ • (0) $+$ $+$ $+$ $+$ $+$ (2, 4)

- Osservo che $\log\left(\dfrac{x}{x+2}\right) > 0$ se $\dfrac{x}{x+2} > 1$
$$= 0 \quad \text{se } \frac{x}{x+2} = 1$$
$$< 0 \quad \text{se } 0 < \frac{x}{x+2} < 1$$

Si ha: segno di f: $+$ $+$ (−4) ○ (−2) $\nexists$ ○ (0) $-$ $-$ $-$ $-$ (2, 4)

- $\lim_{x\to-\infty} \log\left(\underbrace{\frac{x}{x+2}}_{\downarrow 1}\right) = 0$ $\qquad$ $\lim_{x\to-2^-} \log\left(\underbrace{\frac{x}{x+2}}_{\to+\infty}\right) = +\infty$;

$y=0$ a. orizz. per f per $x\to-\infty$ $\qquad$ $x=-2$ a. verticale per f

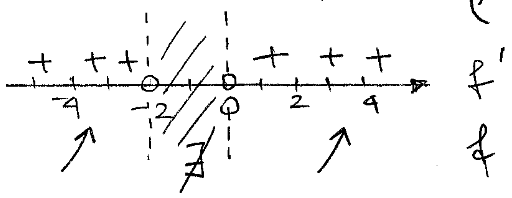
$\lim_{x\to0^+} \log\left(\underbrace{\frac{x}{x+2}}_{\text{infinit. positivo}}\right) = -\infty$ $\qquad$ $x=0$ a. verticale per f

$\lim_{x\to+\infty} \log\left(\underbrace{\frac{x}{x+2}}_{\to 1}\right) = 0$ $\qquad$ $y=0$ a. orizz. per f per $x\to+\infty$.

- f è continua nel dom f, poichè rapporto e composizione di funzione continue.

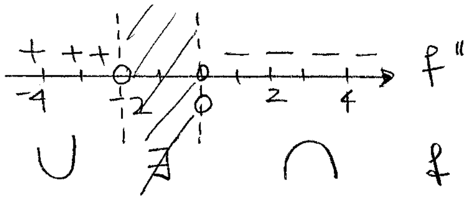
- dom f' = dom f $\qquad$ $f'(x) = \frac{1}{\frac{x}{x+2}} \cdot \left(\frac{x}{x+2}\right)' =$

$$= \frac{\cancel{x+2}}{x} \cdot \frac{\cancel{x}+2-\cancel{x}}{(x+2)^{\cancel{2}}} = \frac{2}{x(x+2)}$$



- dom f'' = dom f

$$f''(x) = \frac{-2\left[(x+2)+x\right]}{\left[x(x+2)\right]^2} = \frac{-2\left[2x+2\right]}{\left[x(x+2)\right]^2} = \frac{-4(x+1)}{\left[x(x+2)\right]^2}$$



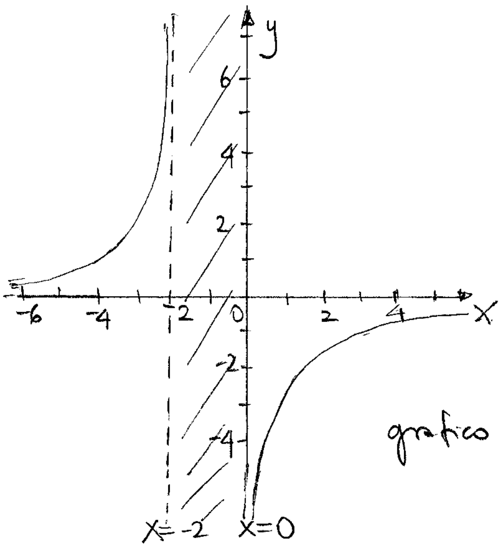


grafico qualitativo di f