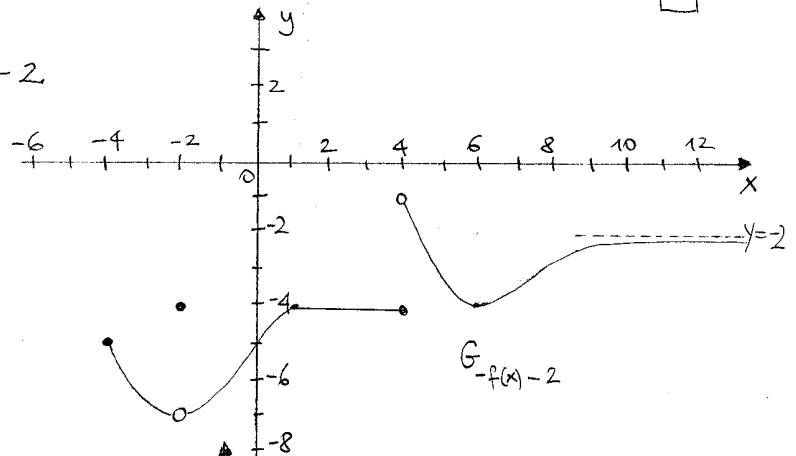


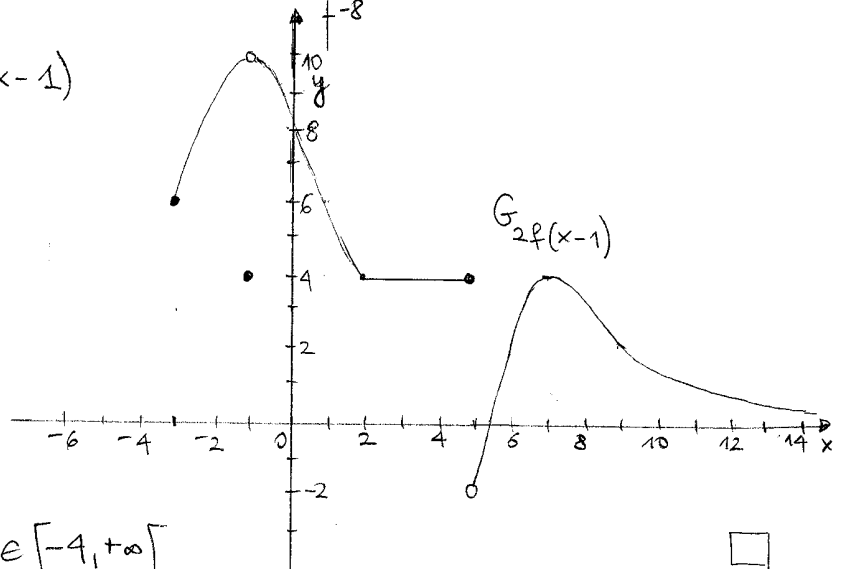
Università degli Studi di Trento - Facoltà di Scienze Cognitive
 CdL in Scienze e Tecniche di Psicologia Cognitive
 CdL in Interfacce e Tecnologie della Comunicazione - CdL in Filosofia
 Verifica settimanale di ANALISI MATEMATICA (CON ELEMENTI DI ALGEBRA)
 a.a. 2011-2012 - Rovereto, 24-28 ottobre 2011

1) $f([-4, +\infty[) =]-1, 5[$ □

ii) $[-4, +\infty[\ni x \mapsto -f(x) - 2$



$[-3, +\infty[\ni x \mapsto 2f(x-1)$



iii) $-1 < f(x) < 5 \quad \forall x \in [-4, +\infty[$ □

quindi f è limitata inferiormente ed è limitata superiormente.

~~Z~~ono però massimo e minimo per f su $[-4, +\infty[$. □

iv) $\exists \min_{[-2, 4]} f = 2 \quad x \in \{-2\} \cup [1, 4]$ sono pr. di minimo

~~$\exists \max_{[-2, 4]} f$~~

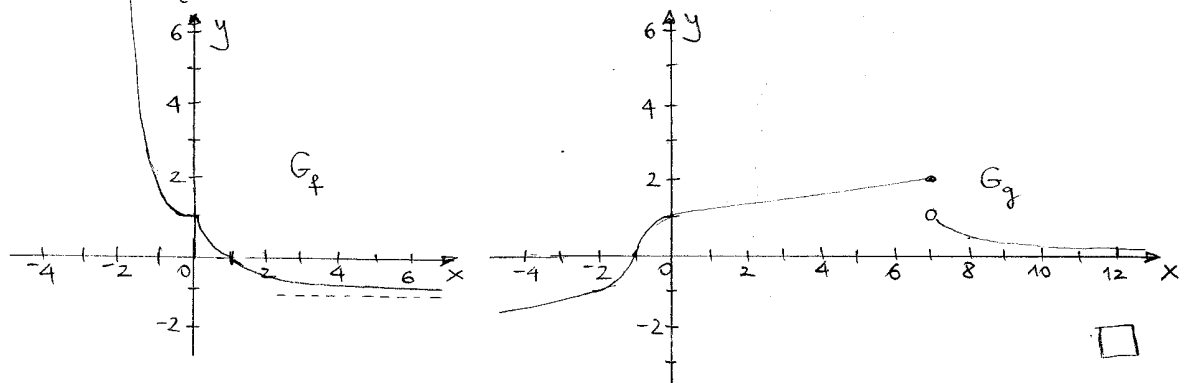
$\exists \min_{[0, 4]} f = 2 \quad x \in [1, 4[$ sono pr. di minimo.

$\exists \max_{[0, 4]} f = 3 \quad x = 0$ pr. di massimo. ■

2) i)

$$f(x) = \begin{cases} -x^3 + 1 & \text{se } x < 0 \\ -\sqrt{x} + 1 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{x^4} - 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

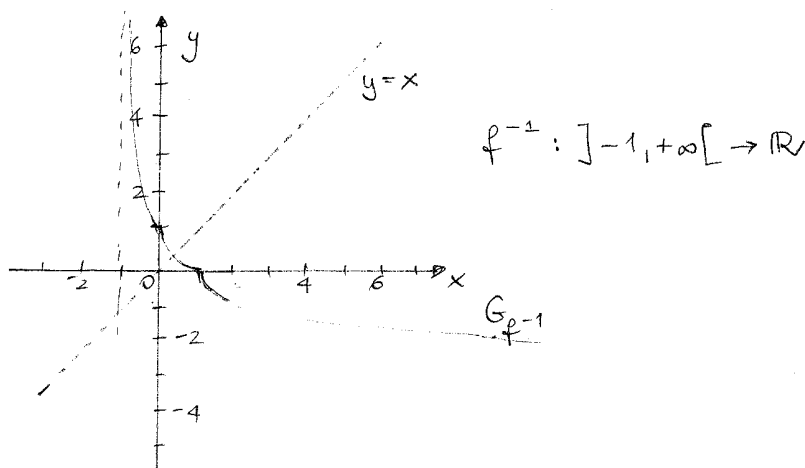
$$g(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x+1} & \text{se } x \leq 7 \\ \frac{1}{x-6} & \text{se } x > 7 \end{cases}$$



ii) $f(\mathbb{R}) =]-1, +\infty[$

$g(\mathbb{R}) =]-\infty, 2]$

iii)



iv) f è limitata inferiormente: $f(x) > -1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

f non è limitata superiormente [infatti, $\forall M > 1 \exists x < 0: f(x) > M$.

Basta risolvere $-x^3 + 1 > M \Leftrightarrow x^3 < 1 - M \Leftrightarrow x < \sqrt[3]{1-M}$.

g non è limitata inferiormente [infatti, $\forall M < 0 \exists x < 0: g(x) < M$.

Basta risolvere $\sqrt[3]{x+1} < M$, ossia $x+1 < M^3$, ossia $x < M^3 - 1$.

g è limitata superiormente: $g(x) \leq 2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

• $\nexists \min_{\mathbb{R}} g$ $\exists \max_{\mathbb{R}} g = 2$ $x = 7$ è pr. di max.

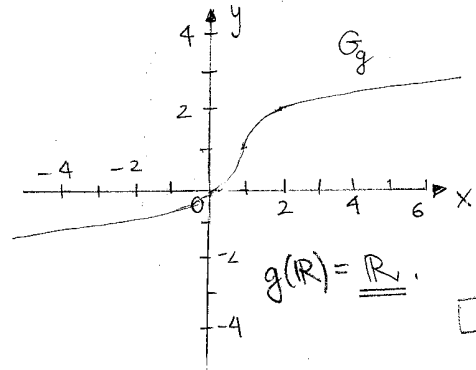
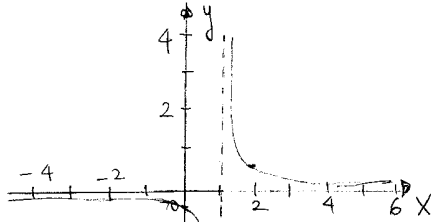
v) $\{x \in \mathbb{R} : -1 \leq f(x) \leq 0\} =]1, +\infty[$.

3) i) $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$

$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{1}{2(x-1)^3}$$

$$g(x) = \sqrt[3]{x-1} + 1$$



$f(\mathbb{R} \setminus \{1\}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

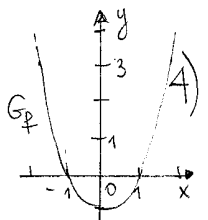
ii) $f(0) = -\frac{1}{2}$, $g(0) = 0$, quindi

$\exists (f+g)(0)$ e $(f+g)(0) = -\frac{1}{2} + 0 = -\frac{1}{2}$;

$\exists (fg)(0)$ e $(fg)(0) = (-\frac{1}{2}) \cdot 0 = 0$;

$\exists (\frac{g}{f})(0)$ e $(\frac{g}{f})(0) = \frac{g(0)}{f(0)} = 0$;

~~$\exists (\frac{f}{g})(0)$~~ poiché $g(0) = 0$.



4) i) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = x^2 - 1$

$g: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ $g(x) = \sqrt[4]{x}$

a) $f(\mathbb{R}) = [-1, +\infty[$

$g([0, +\infty[) = [0, +\infty[$

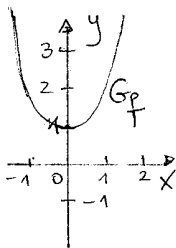
b) L'insieme di definizione di $g \circ f$ è $E = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq 0\} = [-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$

e si ha $g \circ f: E \rightarrow \mathbb{R}$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 - 1) = \sqrt[4]{x^2 - 1}, \forall x \in E.$

L'insieme di definizione di $f \circ g$ è $\text{dom } g = [0, +\infty[$

e si ha $f \circ g: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt[4]{x}) = (\sqrt[4]{x})^2 - 1 = \sqrt{x} - 1.$



ii) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = x^2 + 1$

$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

a) $f(\mathbb{R}) = [1, +\infty[$

$g(\mathbb{R}) = [1, +\infty[$

b) $\min_{\mathbb{R}} f = 1$ $x=0$ pt. di minimo ; $\min_{\mathbb{R}} g = 1$ $x=0$ pt. di minimo

(infatti : $x^2 > 0$ per $x \neq 0$; quindi $f(x) > f(0) \forall x \neq 0$ e $g(x) > g(0) \forall x \neq 0$)

c) Oss. che $h(x) = \frac{1}{x-1} + 1$ è ben definita $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 1$.

Quindi $h \circ f$ è ben definita su $E = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 1\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$

e mi ha $h \circ f : E \rightarrow \mathbb{R}$ $(h \circ f)(x) \doteq h(f(x)) = h(x^2+1) =$
 $= \frac{1}{(x^2+1)-1} + 1 = \frac{1}{x^2} + 1.$

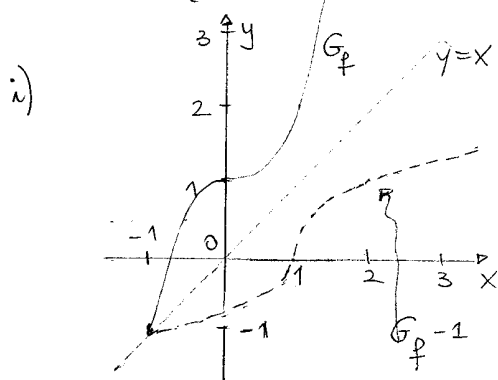
$h \circ g$ è ben definita su $E = \{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq 1\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$

e mi ha $h \circ g : E \rightarrow \mathbb{R}$ $(h \circ g)(x) \doteq h(g(x)) = h(\sqrt{x^2+1}) =$
 $= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}-1} + 1.$ ■

5) $f : [-1, +\infty[\rightarrow [-1, +\infty[$

$g : [-1, 3] \rightarrow [\frac{3}{2}, 3]$

$f(x) = \begin{cases} -2x^2+1 & \text{se } -1 \leq x \leq 0 \\ x^3+1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$



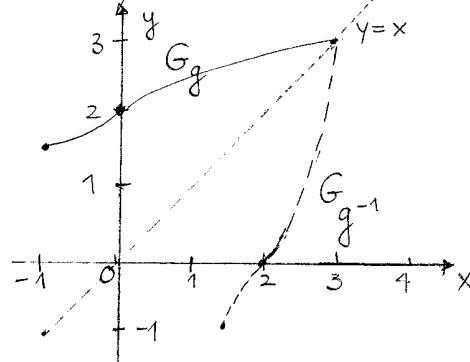
$f^{-1} : [-1, +\infty[\rightarrow [-1, +\infty[$

ii) $\min_{[-1, +\infty[} f = -1$ $x = -1$ pt. di min.

$\min_{[-1, 3]} g = \frac{3}{2}$ $x = -1$ pt. di min.

iii) $\min_{[\frac{3}{2}, 3]} g^{-1} = -1$ $x = \frac{3}{2}$ pt. di min.

$g(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x-1} + 1 & \text{se } -1 \leq x < 0 \\ \sqrt{x+1} + 1 & \text{se } 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$



$g^{-1} : [\frac{3}{2}, 3] \rightarrow [-1, 3]$ □

$\nexists \max_{[-1, +\infty[} f$ (f non è limitata superiormente)

$\max_{[-1, 3]} g = 3$ $x = 3$ pt. di max. □

$\max_{[\frac{3}{2}, 3]} g^{-1} = 3$ $x = 3$ pt. di max. ■