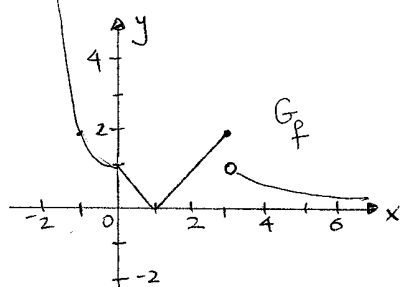


Università degli Studi di Trento - Facoltà di Scienze Cognitive
 CdL in Scienze e Tecniche di Psicologia Cognitiva
 CdL in Interfacce e Tecnologie della Comunicazione - CdL in Filosofia
 Verifica settimanale di ANALISI MATEMATICA (CON ELEMENTI DI ALGEBRA)
 a.a. 2011/2012 - Rovereto, 7-11 Novembre 2011

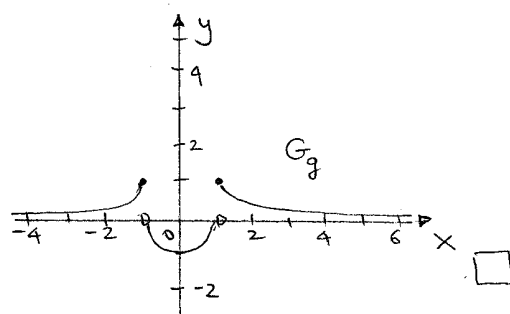
1) $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} |x^3 - 1| & \text{se } x \leq 0 \\ |x - 1| & \text{se } 0 < x \leq 3 \\ \frac{1}{(x-2)^2} & \text{se } x > 3 \end{cases}$$

i)



$$g(x) = \begin{cases} |x^3| - 1 & \text{se } x \in]-1, 1[\\ \frac{1}{x^4} & \text{altrimenti} \end{cases}$$



ii) $\max_{[-1, 3]} f = \underline{2}$ $\underline{x = -1}$, $\underline{x = 3}$ pt. di massimo.

$\min_{[-1, 3]} f = \underline{0}$ $\underline{x = 1}$ pt. di minimo.

iii) $\mathbb{R}$ è un insieme simmetrico (rispetto all'origine). Inoltre,

$$g(-x) = |(-x)^3| - 1 = |-x^3| - 1 = |x^3| - 1 = g(x) \quad \forall x \in]-1, 1[$$

$$g(-x) = \frac{1}{(-x)^4} = \frac{1}{x^4} = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus]-1, 1[.$$

Quindi g è pari.

iv) f ristretta a $]-\infty, 1]$ è decrescente;

f ristretta a $[1, 3]$ è crescente;

f ristretta a $[3, +\infty[$ è decrescente.

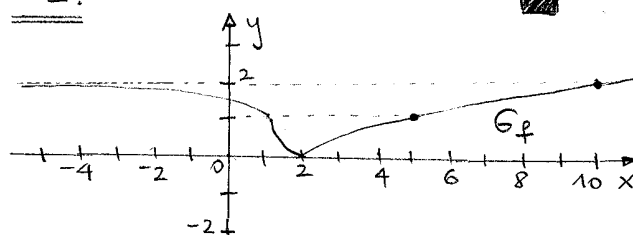
v) $(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(1) = \underline{0}$

$(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(0) = \underline{-1}$.

2) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-2} + 2 & \text{se } x < 1 \\ |\sqrt{x-1} - 1| & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

$y = 2$



ii) f ristretta a $]-\infty, 2]$ è decrescente, mentre è crescente su $[2, +\infty[$. □

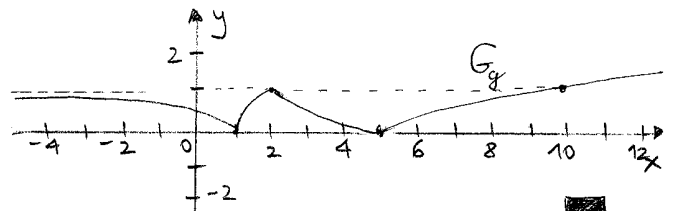
iii) $\max_{[1,5]} f = \underline{1} \quad \underline{x=1}, \underline{x=5} \quad \text{pt. di massimo.}$
 $\min_{[1,5]} f = \underline{0} \quad \underline{x=2} \quad \text{pt. di minimo.}$

$\max_{[0,10]} f = \underline{2} \quad \underline{x=10} \quad \text{pt. di massimo.}$

$\min_{[0,10]} f = \underline{0} \quad \underline{x=2} \quad \text{pt. di minimo.}$ □

iv) $A = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq f(x) \leq 2\} = \underline{]-\infty, 1]} \cup \underline{[5, 10]}.$ □

v) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad g(x) = |f(x) - 1|$



3) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = x^4 + |-2x| + 1 : \mathbb{R}$ è un insieme simmetrico rispetto all'origine; inoltre $f(-x) = (-x)^4 + |-2(-x)| + 1 = x^4 + |2x| + 1 = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ provando che f è una funzione pari. ■

$g: [-3, 3] \rightarrow \mathbb{R} \quad g(x) = \frac{x-x^3}{x^2+1} : [-3, 3]$ è un insieme simmetrico rispetto all'origine; inoltre $g(-x) = \frac{-x - (-x)^3}{(-x)^2 + 1} = \frac{-x + x^3}{x^2 + 1} = -\frac{(x-x^3)}{x^2+1} = -g(x) \quad \forall x \in [-3, 3]$ provando che g è una funzione dispari. ■

4) $3|x-1| \leq 12 \Leftrightarrow |x-1| \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq x-1 \leq 4$

$\Leftrightarrow -3 \leq x \leq 5 \Rightarrow \underline{S = [-3, 5]}.$

$|-x^3 + x| = 0 \Leftrightarrow -x^3 + x = 0 \Leftrightarrow x(-x^2 + 1) = 0 \Rightarrow \underline{S = \{-1, 0, 1\}}.$

$|x^2 - 3x| \geq 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x \leq -1 \quad \vee \quad x^2 - 3x \geq 1$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 \leq 0 \quad \vee \quad x^2 - 3x - 1 \geq 0.$

Ora $x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

$x^2 - 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$

$$\text{segue } x^2 - 3x + 1 \leq 0 \quad \text{per } \frac{3-\sqrt{5}}{2} \leq x \leq \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

$$x^2 - 3x - 1 \geq 0 \quad \text{per } x \leq \frac{3-\sqrt{13}}{2} \quad \text{o} \quad x \geq \frac{3+\sqrt{13}}{2}$$

Quindi $|x^2 - 3x| \geq 1$ ha come insieme delle soluzioni

$$S =]-\infty, \frac{3-\sqrt{13}}{2}] \cup [\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}] \cup [\frac{3+\sqrt{13}}{2}, +\infty[.$$

$$||x-2|-4| \leq 0 \Leftrightarrow ||x-2|-4|=0 \Leftrightarrow |x-2|-4=0 \Leftrightarrow |x-2|=4$$

$$\Leftrightarrow x-2=-4 \quad \text{o} \quad x-2=4 \Rightarrow S = \{-2, 6\}.$$

$$5) \text{ i) } 3x^2 + x|x| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 3x^2 + x^2 = 2 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x < 0 \\ 3x^2 - x^2 = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x < 0 \\ x^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow S = \{-1, \frac{1}{\sqrt{2}}\}.$$

$$\frac{x^2-1}{|x|+1} < 1 \Leftrightarrow x^2-1 < |x|+1 \Leftrightarrow x^2-|x|-2 < 0 \Leftrightarrow$$

nota: $|x|+1 > 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - x - 2 < 0 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x < 0 \\ x^2 + x - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ -1 < x < 2 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x < 0 \\ -2 < x < 1 \end{cases} \Rightarrow S =]-2, 2[.$$

$$2x^2 - |x-1| \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 2x^2 - x + 1 \leq 0 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x < 1 \\ 2x^2 + x - 1 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ S = \emptyset \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x < 1 \\ -1 \leq x \leq \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow S = [-1, \frac{1}{2}].$$

$$x|x-2| > 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 - 2x - 4 > 0 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x < 2 \\ -x(x-2) > 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x < 1-\sqrt{5} \quad \text{o} \quad x > 1+\sqrt{5} \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x < 2 \\ x^2 - 2x + 4 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow S =]1+\sqrt{5}, +\infty[.$$

$$\text{ii) } \left(\frac{1}{2}\right)^{|x+1|} < 2 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{|x+1|} < \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x \downarrow \quad |x+1| > -1 \Rightarrow S = \mathbb{R}$$

-4-

$$3^{|x(x-4)|} \geq 1 \Leftrightarrow 3^{|x(x-4)|} \geq 3^0 \Leftrightarrow |x(x-4)| \geq 0$$

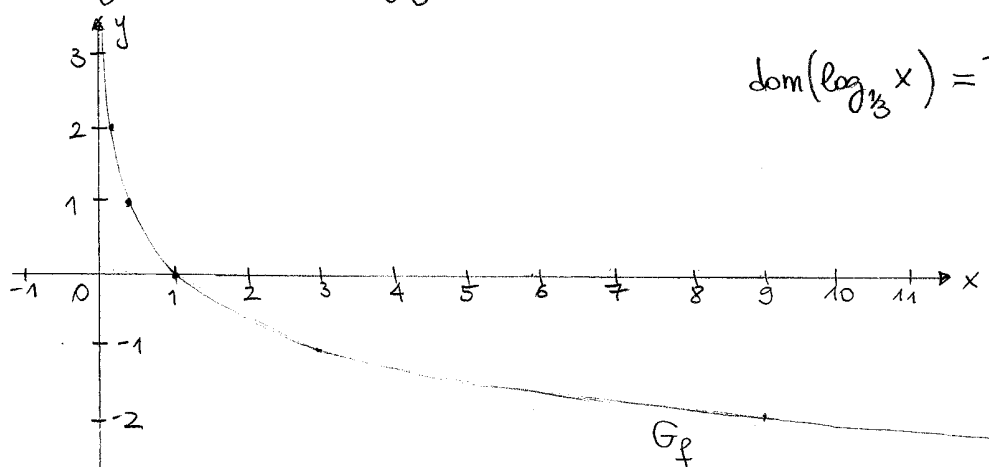
$$\Rightarrow \underline{S = \mathbb{R}}$$

$$4^{-|x|+2} = 1 \Leftrightarrow 4^{-|x|+2} = 4^0 \Leftrightarrow -|x|+2=0 \Leftrightarrow |x|=2$$

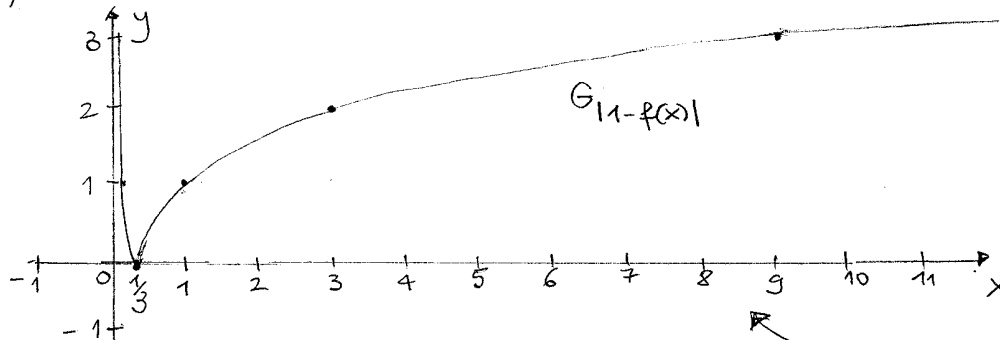
$$\Rightarrow \underline{S = \{-2, 2\}}$$

$$5^{|x^2-2|} \geq -\frac{1}{5} \Rightarrow S = \mathbb{R} \text{ puisque } 5^{|x^2-2|} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

6) i) $\log_{1/3} \frac{1}{9} = 2$; $\log_{1/3} \frac{1}{3} = 1$; $\log_{1/3} 1 = 0$
 $\log_{1/3} 3 = -1$; $\log_{1/3} 9 = -2$



ii)



$$\text{dom } |1 - \log_{1/3} x| =]0, +\infty[$$

