

Università degli Studi di Trento - Facoltà di Scienze Cognitive
 CdL in Scienze e Tecniche di Psicologia Cognitive
 CdL in Interfacce e Tecnologie della Comunicazione - CdL in Filosofia
 Verifica settimanale di ANALISI MATEMATICA (CON ELEMENTI DI ALGEBRA)
 a.a. 2011-2012 - Rovereto, 14-18 novembre 2011

$$1) x^2 \log_2 \frac{1}{2} + x \log e^3 + 2 \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9} \leq 0 \Leftrightarrow -x^2 + 3x + 4 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow (x-4)(x+1) \geq 0$$

$$\Rightarrow \underline{S =]-\infty, -1] \cup [4, +\infty[} . \quad \square$$

$$\frac{2^{|x+1|}}{4^x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2^{|x+1|} \cdot 2^{-2x} = 2^{-1} \Leftrightarrow 2^{|x+1|-2x} = 2^{-1}$$

$$\Leftrightarrow |x+1| - 2x = -1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x+1-2x = -1 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x+1 < 0 \\ -(x+1)-2x = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x = 2 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x < -1 \\ -3x = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{S = \{2\}} . \quad \square$$

$$\log_3 (3^x \cdot (\frac{1}{3})^{x^2-1}) = -1 \Leftrightarrow \log_3 (3^x \cdot 3^{-x^2+1}) = -1$$

$$\Leftrightarrow \log_3 (3^{x-x^2+1}) = -1 \Leftrightarrow \log_3 (3^{x-x^2+1}) = \log_3 \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow 3^{x-x^2+1} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3^{x-x^2+1} = 3^{-1}$$

$$\Leftrightarrow x - x^2 + 1 = -1 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x+1) = 0 \Rightarrow \underline{S = \{-1, 2\}} . \quad \blacksquare$$

$$2) \left(\frac{1}{e}\right)^{x^2-x} \geq 1 \Leftrightarrow e^{-x^2+x} \geq e^0 \Leftrightarrow -x^2+x \geq 0 \Leftrightarrow x^2-x \leq 0$$

$$\Rightarrow \underline{S = [0, 1]} . \quad \square$$

$$e^{-x} \cdot e^{-x^2+4} > \frac{1}{e^{2x}} \Leftrightarrow e^{-x-x^2+4} > e^{2x} \Leftrightarrow -x-x^2+4 > 2x$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 < 0 \Leftrightarrow (x+4)(x-1) < 0$$

$$\Rightarrow \underline{S =]-4, 1[} . \quad \square$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{x^2-2x} - 4^x \leq 0 \Leftrightarrow 4^{-x^2+2x} \leq 4^x \Leftrightarrow -x^2+2x \leq x$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x \geq 0 \Rightarrow \underline{S =]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[} . \quad \square$$

$$\log |x-1| \leq 0 \Leftrightarrow 0 < |x-1| \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ -1 \leq x-1 \leq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ 0 \leq x \leq 2 \end{cases} \Rightarrow \underline{S = [0, 2] \setminus \{1\}}. \quad \square$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(|x|+2) \leq -\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{3}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} |x|+2 > 0 & (\text{sempre vero!}) \\ x > 0 \\ \log_{\frac{1}{2}}(|x|+2) \leq \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{3}{x}\right) \end{cases}$$

$$\log_{\frac{1}{2}} x \downarrow \begin{cases} x > 0 \\ |x|+2 \geq \frac{3}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x+2-\frac{3}{x} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \frac{x^2+2x-3}{x} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2+2x-3 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ (x-1)(x+3) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{S = [1, +\infty[}. \quad \square$$

$$\log_2(x^2-1) \leq 3 \Rightarrow \begin{cases} x^2-1 > 0 \\ \log_2(x^2-1) \leq \log_2 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-1 > 0 \\ x^2-1 \leq 8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 > 1 \\ x^2 \leq 9 \end{cases} \Rightarrow \underline{S = [-3, -1[\cup]1, 3]}. \quad \square$$

$$\log_3(1+x) - \log_3(|x|+2) \leq -1 \Leftrightarrow \log_3(1+x) - \log_3(|x|+2) \leq \log_3 \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1+x > 0 \\ |x|+2 > 0 \\ \log_3\left(\frac{1+x}{|x|+2}\right) \leq \log_3 \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ \mathbb{R} \\ \frac{1+x}{|x|+2} \leq \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$(\text{incrollare: } |x|+2 > 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ 3(1+x) \leq |x|+2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x \geq 0 \\ 3(1+x) \leq x+2 \end{cases} \quad \circ \quad \begin{cases} x > -1 \\ x < 0 \\ 3(1+x) \leq -x+2 \end{cases}$$

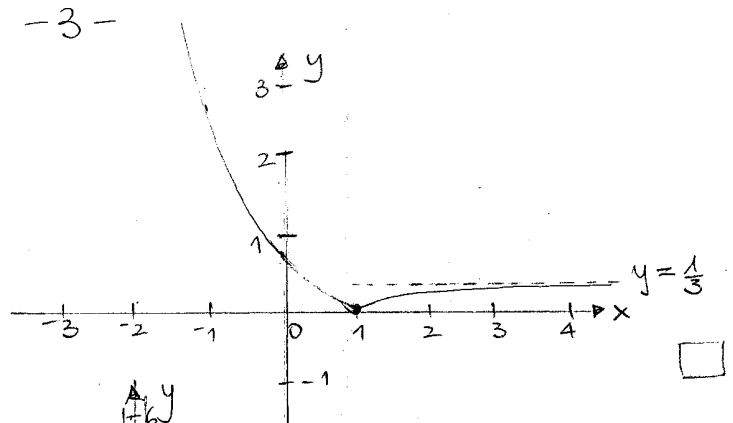
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 2x+1 \leq 0 \end{cases} \quad \circ \quad \begin{cases} x > -1 \\ x < 0 \\ 4x \leq -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq -\frac{1}{2} \end{cases} \quad \circ \quad \begin{cases} x > -1 \\ x < 0 \\ x \leq -\frac{1}{4} \end{cases}$$

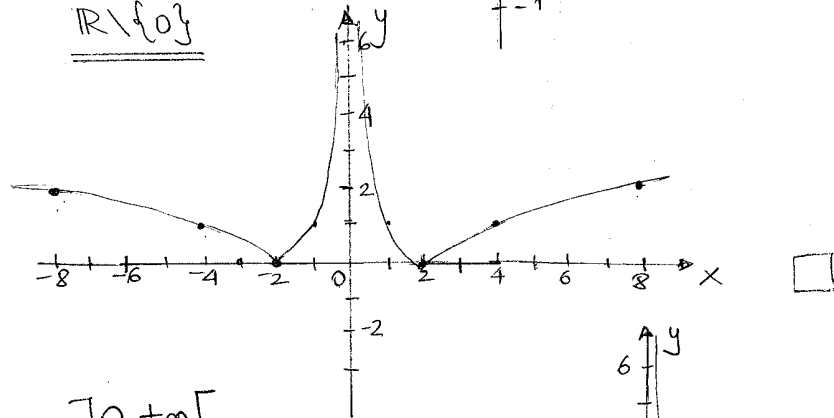
↑
impossibile!

$$\underline{S =]-1, -\frac{1}{4}]}. \quad \blacksquare$$

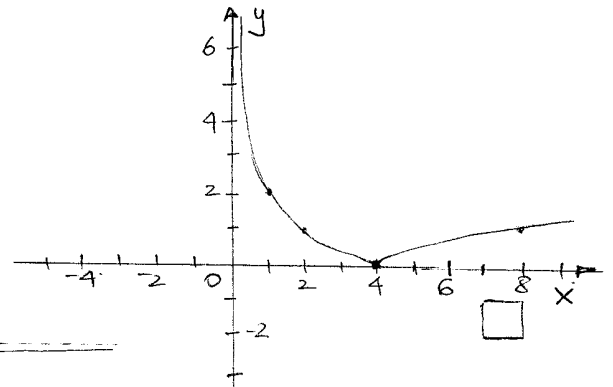
$$3) \left| \left(\frac{1}{3} \right)^x - \frac{1}{3} \right| \quad \underline{\underline{\mathbb{R}}}$$



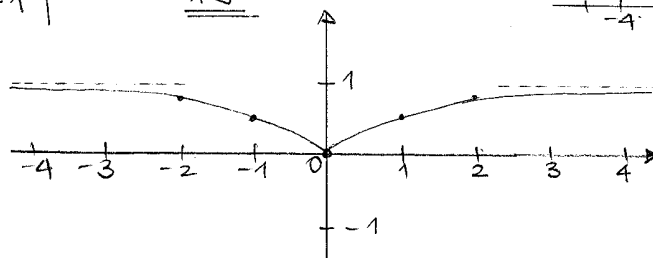
$$|\log_2 |x| - 1| \quad \underline{\underline{\mathbb{R} \setminus \{0\}}}$$



$$|\log_{\frac{1}{2}} x + 2| \quad \underline{\underline{]0, +\infty[}}$$

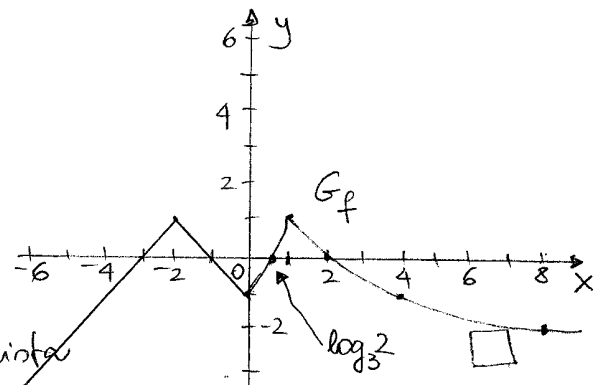


$$\left| \left(\frac{1}{2} \right)^{|x|} - 1 \right| \quad \underline{\underline{\mathbb{R}}}$$



$$4) i) f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} -|x+2| + 1 & \text{se } x \leq 0 \\ 3^x - 2 & \text{se } 0 < x < 1 \\ 1 + \log_{\frac{1}{2}} x & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$



ii) f è continua su $[2, 4]$; f soddisfa
quindi le ipotesi del teorema di Weierstrass. Si ha

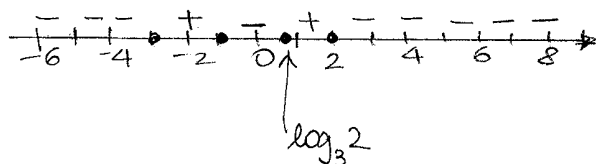
$$\min_{[2, 4]} f = f(4) = -1 \quad \underline{\underline{x=4 \text{ pt. di minimo}}}$$

$$\max_{[2, 4]} f = f(2) = 0 \quad \underline{\underline{x=2 \text{ pt. di massimo.}}}$$

iii) f è continua su $[-2, 0]$; inoltre $f(-2) = 1$ e $f(0) = -1$.

Quindi f soddisfa le ipotesi del teorema di esistenza degli zeri su $[-2, 0]$. In questo caso si vede banalmente che per $x = -1$ si ha $f(-1) = 0$! $\square$

iv)



segno di f



5) Poniamo $f(x) = x^4 + 4x - 2$ su $[0, 1]$: f è continua su $[0, 1]$ e $f(0) = -2 < 0$ e $f(1) = 3 > 0$. Per il teorema di Jensen degli zeri $\exists x_0 \in]0, 1[$ t.c. $f(x_0) = 0$ e quindi x_0 soluzione di $x^4 = -4x + 2$. Inoltre, essendo f crescente su $[0, 1]$

(la funzione x^4 è crescente su $[0, 1]$ e $4x - 2$ è crescente su $[0, 1]$; inoltre, la somma di due funzioni crescenti è crescente) x_0 è unica su $[0, 1]$.

Consideriamo il punto medio di $[0, 1]$: $a_1 = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$.

Abbiamo $f(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})^4 + 4 \cdot \frac{1}{2} - 2 = (\frac{1}{2})^4 > 0$. Possiamo

asserire che x_0 cade nell'intervallo $[0, \frac{1}{2}]$. Consideriamo il

punto medio di $[0, \frac{1}{2}]$, ossia $a_2 = \frac{1}{4}$. Abbiamo $f(\frac{1}{4}) = (\frac{1}{4})^4 + 4 \cdot \frac{1}{4} - 2 = (\frac{1}{4})^4 - 1 < 0$. Ponendo $[\tilde{a}, \tilde{b}] = [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \subset]0, 1[$

si ha $\tilde{b} - \tilde{a} \leq \frac{1}{4}$ e si ha $x_0 \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$. $\blacksquare$

6) i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$

$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -1$

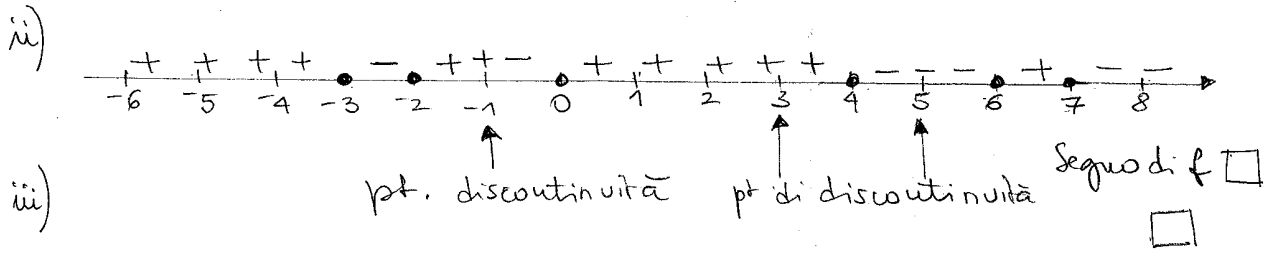
$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 2$

$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 1$

$\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = -1$

$\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = -1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$. $\square$



iv) $\min_{[5,7]} f = -2$ $x=5$ pt. di minimo

$\max_{[5,7]} f = 1$ $x=\frac{13}{2}$ pt. di massimo.

☐

v) f non soddisfa le ipotesi del teorema di Weierstrass su $[5,7]$ non essendo continua in $x=5$.

☒