Università degli Studi di Trento - Facoltà di Scienze MM.FF.NN
Corso di Laurea in Matematica
Corso di Calcolo delle Variazioni - a.a. 2010/11 (periodo 21/02/11-01/06/11)
docente: Prof. Anneliese Defranceschi
e-mail: anneliese.defranceschi@unitn.it
homepage: http://latemar.science.unitn.it/defranceschi

Lezioni: martedì 10.30-12.30, giovedì 10.30-12.30

22/02/11 (2 ore):
Introduzione al corso: orario, indirizzo e-mail, programma (in linea di massima). Ottimizzazione in $\mathbb{R}$ (in $\mathbb{R}^n$) (teorema di Weierstrass, punti critici, convessità, variazione prima e seconda).

24/02/11 (2 ore):
Brevi cenni storici. Esempi di modellizzazione mediante funzionali integrali (curva di minima lunghezza, brachistocrona, superficie di rivoluzione di area minima). Integrali variazionali (integrando variazionale, funzione di Lagrange o lagrangiana).
Metodi indiretti (classici) e metodi diretti - introduzione. Nota sulla non-esistenza di minimi: $F(u) = \int_{-1}^{1} x^2(u'(x))^2\,dx$ in $X = \{u \in \mathcal{C}^1([-1,1]) : u(-1) = -1, u(1) = 1\}$ (esempio di Weierstrass).

01/03/11 (2 ore):
Non-esistenza del minimo (e del massimo): $F(u) = \int_0^1 \frac{1}{1+(u'(x))^2}\,dx$ in $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = 0, u(1) = 1\}$.
Variazione prima e variazione seconda per $F : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq V$ con V spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Calcolo della variazione prima per alcuni funzionali integrali.
Lemma fondamentale del Calcolo delle Variazioni.

03/03/11 (2 ore):
Metodi indiretti (classici). Equazione di Eulero-Lagrange in forma debole (EED). Estremale debole di F. Equazione di Eulero-Lagrange (EE). Estremale di F.
(Non-) Regolarità di estremali deb. e minimizzanti: $F(u) = \int_{-1}^{1}(u(x))^2[2x - u'(x)]^2\,dx$ in $X = \{u \in \mathcal{C}^1([-1,1]) : u(-1) = 0, u(1) = 1\}$.
Non-esistenza di un minimizzante: $F(u) = \int_0^1[(u'(x))^2 - 1]^2\,dx$ in $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = 0, u(1) = 0\}$ (paradosso di Eulero). Il minimo esiste nella classe delle funzioni $\mathcal{C}^1$-a tratti.
Equazione di Eulero-Lagrange per $F(u) = \int_0^1[(u'(x))^2 - 1]^2\,dx$. Esistenza di un estremale di F in $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = 0, u(1) = 0\}$ che non è minimo.
Funzioni convesse. La convessità della funzione lagrangiana come condizione sufficiente affinchè un estremale di F sia un punto di minimo. Stretta convessità ed unicità degli eventuali minimi (enunciato).

08/03/11 (2 ore):
Dimostrazione del teorema enunciato sopra. Equazione di Eulero-Lagrange $(EE)'$. Se f non dipende esplicitamente da x, allora $\Phi(u,\xi) := f(u,\xi) - \xi f_\xi(u,\xi)$ è un integrale primo del funzionale F.
L'equazione di Eulero-Lagrange (EE) *e gli estremali (e loro natura) di* F :
Caso 1): $f(x,u,\xi) = f(\xi)$.
1.a) f convessa. Disuguaglianza di Jensen e un suo corollario (Applicazione: Curva di minima lunghezza - caso non-parametrico).
1.b) f non convessa (Paradosso di Eulero; $F(u) = \int_0^1 e^{-(u'(x))^2}\,dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = 0, u(1) = 0\}$).

15/03/11 (2 ore):
Caso 2): $f(x,u,\xi) = f(x,\xi)$ (es. di Weierstrass)
Caso 3): $f(x,u,\xi) = f(u,\xi)$
Equivalenza tra (EE) e l'integrale primo per F per soluzioni non constanti.

3.a) f convessa ($F(u)=\int_{-1}^{1}[\frac{k}{2}(u'(x))^2+gu(x)]\,dx$ su $X=\{u\in\mathcal{C}^1([-1,1]) : u(-1)=0, u(1)=0\}$; corda elastica).
Commenti sulla stretta convessità della lagrangiana e l'unicità del minimo per il problema variazionale.

22/03/11 (2 ore):
$F(x)=\int_{t_1}^{t_2}[\frac{m}{2}|x'(t)|^2-V(x(t))]\,dt$; l'integrale primo di F e la conservazione dell'energia totale.
Serie di Fourier: definizione; coefficienti di Fourier; esempi.

24/03/11 (2 ore):
Convergenze per le serie di Fourier (in media quadratica; puntuale, uniforme). Disuguaglianza di Bessel. Identità di Parseval. Disuguaglianza di Poincarè-Wirtinger.
3.b) f non convessa ($F_\lambda(u)=\int_0^{\pi}[(u'(x))^2-\lambda^2(u(x))^2]\,dx$ su $X=\{u\in\mathcal{C}^1([0,\pi]) : u(0)=0, u(\pi)=0\}$ al variare di $\lambda\in\mathbb{R}$).

29/03/11 (2 ore):
Studio del problema della brachistocrona: non-convessità della funzione lagrangiana; l'integrale primo legato al funzionale $T(u)$; il minimo (espresso in forma parametrica) è un arco di cicloide; tempo minimo di percorrenza. Confronto con il tempo di percorrenza lungo una retta.

31/03/11 (2 ore):
Ancora qualche osservazione sulla brachistocrona: confronto con il tempo di percorrenza lungo una semicirconferenza. Tautocronia della cicloide (solo accennato).
Studio del problema delle superfici di rivoluzione di area minima: funzioni iperboliche; l'integrale primo legato al funzionale $S(u)$; catenaria, catenoide. Esistenza o non di estremali soddisfacenti le condizioni al contorno.
Caso 4): $f=f(x,u,\xi)$
($F(u)=\int_0^1[\frac{1}{2}(u'(x))^2+g(x)u(x)]\,dx$ su $X=\{u\in\mathcal{C}^1([0,1]) : u(0)=0, u(1)=0\}$; g continua assegnata).
Problemi variazionali con vincolo isoperimetrico: Teorema dei moltiplicatori di Lagrange (enunciato). Il caso convesso.

05/04/11 (2 ore):
Dimostrazione del teorema dei molitplicatori di Lagrange.
Applicazione del teorema dei moltiplicatori di Lagrange a $F(u)=\int_0^1(u'(x))^2\,dx$ su $X=\{u\in\mathcal{C}^1([0,1]) : u(0)=u(1)=0\}$ con il vincolo isoperimetrico $G(u)=\int_0^1 u(x)\,dx=1$.
Il problema della catenaria (il problema del filo pesante).

07/04/11 (2 ore):
Conclusione della dimostrazione del problema del filo pesante. Il problema di Didone usando i moltiplicatori di Lagrange. Enunciato del teorema di Green nel piano.

12/04/11 (2 ore):
Il problema di Didone usando il teorema di Green nel piano e la disuguaglianza di Poincarè-Wirtinger. La disuguaglianza isoperimetrica (usando il teorema di Green nel piano e la disuguaglianza di Poincarè-Wirtinger generale).
Il lemma di du Bois-Reymond e suo corollario.

13/04/11 (2 ore):
L'equazione di Eulero-Lagrange per f e u di classe $\mathcal{C}^1$. L'equazione di Eulero-Lagrange in forma integrale. Estremali spezzati: l'equazione di Eulero-Lagrange in forma integrale e le condizioni di Erdmann (senza dim.). Applicazioni ($F(u)=\int_0^1[(u'(x))^2-1]\,dx$ su $Y=\{u\in\mathcal{C}^1_{\text{tratti}}([0,1]) : u(0)=u(1)=0\}$ e su $Y^\beta=\{u\in\mathcal{C}^1_{\text{tratti}}([0,1]) : u(0)=0, u(1)=\beta\}$;
$F(u)=\int_{-1}^{1}(u(x))^2(1-u'(x))^2\,dx$ su $Y=\{u\in\mathcal{C}^1_{\text{tratti}}([-1,1]) : u(-1)=0, u(1)=1\}$ e su $Y^{\alpha,\beta}=\{u\in\mathcal{C}^1_{\text{tratti}}([-1,1]) : u(-1)=\alpha, u(1)=\beta\}$.

14/04/11 (2 ore):

Minimi relativi deboli e forti (stretti). Ovviamente ogni punto di minimo relativo forte è un punto di minimo relativo debole. Non vale il viceversa: la funzione identicamente nulla su $[0,1]$ è un punto di minimo relativo debole, ma non forte, per $F(u) = \int_0^1 [(u'(x))^2 - (u'(x))^4]\, dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = u(1) = 0\}$.

Analogamente per il funzionale di Scheeffer: $F(u) = \int_0^1 [(u'(x))^2 + (u'(x))^3]\, dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = u(1) = 0\}$.

La variazione seconda e condizioni sufficienti (coercitività) affinchè un estremale debole di F sia un punto di minimo relativo debole. La condizione di positività della variazione seconda non è sufficiente affinchè un estremale debole di F sia un punto di minimo relativo debole: esempio di Scheeffer ($F(u) = \int_{-1}^1 [x^2(u'(x))^2 + x(u'(x))^3]\, dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([-1,1]) : u(-1) = u(1) = 0\}$).

28/04/09 (2 ore):

Dimostrazione della sufficienza della coercitività affinchè un estremale debole di F sia un punto di minimo relativo debole.

La coercività della variazione seconda non è sufficiente affinchè un estremale debole di F sia un punto di minimo relativo forte (esempio di Scheeffer: $F(u) = \int_0^1 [(u'(x))^2 + (u'(x))^3]\, dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = u(1) = 0\}$).

Lagrangiana accessoria e integrale accessorio.

Condizione necessaria di Legendre per minimi relativi deboli. Applicazione a $F(u) = \int_0^1 [3(u'(x))^4 - 20(u'(x))^3 + 36(u'(x))^2]\, dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = 0, u(1) = 1\}$.

03/05/11 (2 ore):

Funzione di eccesso di Weierstrass. Condizione necessaria di Weierstrass per minimi relativi forti (senza dim.). Applicazione a $F(u) = \int_0^1 [(u'(x))^2 + (u'(x))^3]\, dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = u(1) = 0\}$.

Introduzione alla teoria di Jacobi per minimi relativi deboli. Equazione di Jacobi. Campi di Jacobi. Lemma di Legendre. Lemma di Jacobi.

05/05/11 (2 ore):

Condizioni sufficienti per minimi relativi deboli e campi di Jacobi. Condizione necessaria di Jacobi. Funzione di Jacobi. Punti coniugati. Condizioni sufficienti per minimi relativi deboli e punti coniugati (senza dim.).

Studio della natura dell'estremale $u_0 \equiv 0$ di $F(u) = \int_0^b [(u'(x))^2 - (u(x))^2]\, dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,b]) : u(0) = u(b) = 0\}$, al variare di $b > 0$.

05/05/11 (2 ore):

Introduzione alla teoria dei campi di Weierstrass per minimi relativi forti. Campo di estremali (rispetto alla lagrangiana f) e funzione pendenza.

Campo di estremali e funzione pendenza: casi $f(x,u,\xi) = f(\xi)$ e $f(x,u,\xi) = \xi^2 - u^2$.

Condizioni sufficienti affinchè un estremale immerso in un campo di estremali sia un punto di minimo assoluto (mediante la funzione eccesso di Weierstrass) (senza dim.); condizioni sufficienti affinchè un estremale immerso in un campo di estremali sia un punto di minimo relativo debole (risp. forte) (mediante la condizione di Legendre stretta (risp. forte)) (senza dim.).

Condizioni sufficienti affinchè un estremale sia un punto di minimo relativo forte mediante i punti coniugati e la teoria dei campi di estremali (senza dim.).

Applicazione a $F(u) = \int_0^1 u(x)(u'(x))^2\, dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = u(1) = 1\}$. Dimostrazione che $F(u) = \int_0^1 u(x)(u'(x))^2\, dx$ non ammette minimo assoluto su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = u(1) = 1\}$.

10/05/11 (2 ore):

Studio della natura dell'estremale $u_0 \equiv 0$ di $F(u) = \int_0^1 [(u'(x))^2 - (u(x))^2]\, dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = u(1) = 0\}$. Studio della natura dell'estremale $u_0(x) = kx$ di $F(u) = \int_0^1 [(u'(x))^2 - 1]^2\, dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = 0, u(1) = k\}$ al variare di $k \in \mathbb{R}$.

Metodi diretti. Introduzione. Teorema di Weierstrass: dimostrazione e commenti sul ruolo della compattezza dei sottolivelli della funzione e della continuità della funzione nella dimostrazione. Successione minimizzante.

12/05/09 (2 ore):

Funzione semicontinua inferiormente e sottolivelli chiusii. Funzione coerciva. Teorema di Tonelli (generalizzazione del teorema di Weierstrass): esistenza del minimo.
Unicità del punto di minimo.

17/05/09 (2 ore):

Applicazione del quadro teorico generale del metodo diretto ad un funzionale integrale dipendente solo dalla funzione u: $F(u) = \int_0^1 [(u(x))^2 - 2g(x)u(x)]\, dx$ su $X = L^2(0,1)$.
Quanto segue è stato solo menzionato alla fine della lezione: Applicazione del quadro teorico generale del metodo diretto ad un funzionale integrale dipendente dalla funzione u e dalla derivata u' : $F(u) = \int_a^b [(u'(x))^2 + g(x)u(x)]\, dx$ su $X = H_0^1(a,b)$.