

- Introduzione

Avete già incontrato nei corsi di Analisi il problema di trovare (e caratterizzare) il valore massimo e/o il valore minimo (o valori massimi e/o minimi locali), se esistono, di una funzione

$$f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$$

e i rispettivi pt. di massimo e/o pt. di minimo.

Facciamo un breve ripasso di quanto già visto.

(A) Ottimizzazione in $\mathbb{R}^n$

Supponiamo data una funzione

$$f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad \Omega \subseteq \mathbb{R}^n,$$

di cui vogliamo trovare gli (valori) estremi ^{*} (i.e. massimo o minimo) (risp. (valori) estremi locali) e i rispettivi estremanti (i.e. pt. di max o di min) (risp. estremanti locali).

Ricordiamo allora alcuni fatti:

(0.0) f può non avere (valori) estremi in Ω .

Es. i) $n=1 \quad \Omega = \mathbb{R} \quad f(x) = x \quad (f \text{ è illimitata!}),$

ii) $n=1 \quad \Omega =]-1, 1[\quad f(x) = x \quad (f \text{ è limitata, ma } \nexists \text{ estremi}).$

iii) $n=1 \quad \Omega = [-1, 1] \quad f(x) = x \quad \text{assume max e min;}$
 $\Omega = [-1, 1] \quad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

$\nexists \max_{[-1,1]} g \quad \nexists \min_{[-1,1]} g.$

□

* Spesso scriverò semplicemente "estremi" (risp. "estremi locale") invece di "valore estremo" (risp. "valore estremo locale").

(0.1) f può assumere solo uno dei (valori) estremi su Ω .

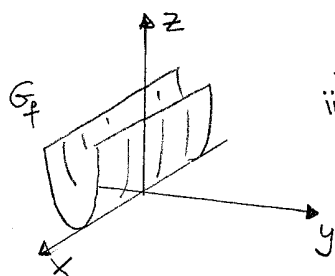
Es. i) $n=1$ $\Omega =]-1, 1]$ $f(x) = x$: $\max_{]-1, 1]} f = 1$; $\cancel{\min_{]-1, 1]} f}$.

ii) $n=1$ $\Omega =]-1, 1[$ $f(x) = x^2$: $\min_{]-1, 1[} f = 0$; $\cancel{\max_{]-1, 1[} f}$.

(0.2) f può assumere un (valore) estremo in più di un punto di Ω .

Es. i) $n=1$ $\Omega = [-1, 1]$ $f(x) = x^2$: $\max_{[-1, 1]} f = 1$ $f(-1) = f(1) = 1$

quindi pt. di massimo sono $x_1 = -1, x_2 = 1$.



ii) $n=2$ $\Omega = \mathbb{R}^2$ $f(x, y) = y^2$ (il grafico è un cilindro parabolico)

: $\min_{\mathbb{R}^2} f = 0$

e i pt. di minimo si trovano sull'asse x . $\square$

Il seguente teorema ci garantisce l'esistenza di valori estremi (condizioni sufficienti!)

Teorema (di Weierstrass): Sia $D \subseteq \mathbb{R}^n$ compatto e $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Allora f assume massimo e minimo su D .

(oss. In $\mathbb{R}^n$, D compatto $\Leftrightarrow D$ è chiuso (contiene tutti i pt. della sua frontiera) e limitato.

$D = [a, b]$ compatto in $\mathbb{R}$; $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$ compatto in $\mathbb{R}^n$).

Oss. Gli esempi precedenti dimostrano che né la compattezza né

la continuità da soli possono garantire l'esistenza di valori estremi.

(0.3) Il (valore) massimo di f è il (valore) minimo di $-f$ e viceversa.

Quindi è sufficiente caratterizzare i punti di minimo (o pt. di min. loc.)
cioè i pt. $x_0 \in \Omega$ t.c.

$$f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in \Omega \quad \left(\text{nsp. } \forall x \in B(x_0, \rho) \cap \Omega \right. \quad \left. \begin{matrix} \rho > 0 \\ \text{opportuno} \end{matrix} \right) \quad (*)$$

(Abbiamo visto sopra che possiamo avere pt. di minimo anche in insiemi non compatti). □

Punti critici (= Stazionari)

→ $n=1$: Sia $\Omega =]a, b[$; ma $x_0 \in \Omega$, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Se x_0 è un pt. di minimo locale di f e f è derivabile in x_0 , allora

$$f'(x_0) = 0. \quad (\underline{x_0 \text{ pt. critico, o pt. stazionario}})$$

Inoltre, se $f \in \mathcal{C}^2(]a, b[)$, dalla formula di Taylor si ha

$$f(x) - f(x_0) = \frac{1}{2} f''(\xi) (x - x_0)^2 \quad \begin{matrix} \text{per un opportuno} \\ \xi \text{ tra } x_0 \text{ e } x, \end{matrix}$$

e quindi $f''(x_0) \geq 0$.

Allora, le condizioni $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) \geq 0$
sono condizioni necessarie per un minimo locale per f
in x_0 .

NOTA: Ricordiamo che queste non sono sufficienti !!! $\Omega =]-1, 1[$

$$f(x) = x^3 \quad f'(0) = 0 \quad f''(0) \geq 0.$$

$(*) \quad B(x_0, \rho) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < \rho\}$. Inoltre se la drizg. è stretta $\forall x \neq x_0$ non ha pt. di minimo (nsp. locali) stretti.

$x=0$ non è né un pt. di minimo, né un pt. di massimo locale per f in $]-1,1[$.

D'altra parte, le condizioni

$$f'(x_0) = 0 \quad f''(x_0) > 0$$

sono sufficienti, ma non condizioni necessarie per $x = x_0$ ad essere un pt. di minimo locale (stretto) per f . Basta prendere

$f(x) = x^4$ (infatti $x=0$ è pt. di minimo (stretto) per f

poiché $f(x) > f(0) \quad \forall x \neq 0$, ma $f'(0) = f''(0) = 0$)

NOTA: In altre parole, c'è un "slight gap" tra le condizioni necessarie e sufficienti. Questo fenomeno è abbastanza tipico anche per il CALCOLO DELLE VARIAZIONI e sarà osservato ripetutamente.

(0.4) Se f è una funzione convessa su Ω , allora assume un valore minimo in ogni punto critico di Ω .

⊛ Per quello che mi interessa ora, ricordo che una funzione f di classe $\mathcal{C}^2(\Omega)$ è convessa, se

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \forall x, x_0 \in \Omega. \quad (**)$$

Una funzione convessa non ha necessariamente un punto critico (es. $f(x) = e^x$ su $\mathbb{R}$), ma se x_0 è un punto critico della funzione convessa, allora $f'(x_0) = 0$ e dalla disug. sopra si ha $f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in \Omega$, cioè x_0 è un pt. di minimo per f .

(0.5) Se f è una funzione strett. convessa in Ω , i.e. $\forall x \in \Omega$ in $(**)$ vale $\forall x \in \Omega$ e $=$ se e solo se $x = x_0$, allora f può avere al più un punto critico, e quindi, al più un punto di minimo interno, in Ω .

(se x_0 è un pt. critico di una funzione strett. convessa, allora $f(x) > f(x_0) \quad \forall x \in \Omega \setminus \{x_0\}$. Allora f non può assumere il valore minimo $f(x_0)$ in un altro punto di Ω).

Es. $f(x) = x^2$ su $\Omega = \mathbb{R}$ $x_0 = 0$

$$f'(x) = 2x$$

$$(**) \Leftrightarrow x^2 \geq x_0^2 + 2x_0(x - x_0) \quad \forall x, x_0 \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x_0^2 \geq 2x_0x - 2x_0^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x_0^2 \geq 2x_0x$$

$$\Leftrightarrow (x - x_0)^2 \geq 0 \quad \forall x, x_0 \in \mathbb{R} !$$

In $(**)$ si ha l'uguaglianza $\Leftrightarrow x = x_0$.

L'unico pt. critico di $f(x) = x^2$ è $x_0 = 0$ e assume in questo il valore minimo ! □

OSS. Abbiamo visto un teorema di esistenza dei valori estremi per una funzione $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ continua, $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ compatto.

Per quanto visto sopra, essi saranno da ricercare

- tra i pt. di non derivabilità della funzione;
- tra i pt. critici della funzione all'interno di Ω ;
- tra i valori di f su $\partial\Omega$ (la frontiera di Ω). □

→ $n > 1$ Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe $\mathcal{C}^1$. Per $x_0 \in \Omega$ e $\xi \in \mathbb{R}^n$ e per δ sufficientemente piccolo, abbiamo che la funzione

$$\phi(t) \doteq f(x_0 + t\xi) \quad (|t| < \delta)$$

(dobbiamo avere che $x_0 + t\xi \in \Omega$)

è di classe $\mathcal{C}^1$.

Allora chiamiamo la sua derivata $\phi'(0)$ per $t=0$

la variazione prima di f in x_0 nella direzione ξ e scriviamo

$$\delta f(x_0, \xi) \doteq \phi'(0) \quad \left(= \left. \frac{d}{dt} f(x_0 + t\xi) \right|_{t=0} \right)$$

(nota: se $|\xi| = 1$, allora $\delta f(x_0, \xi)$

non è altro che la derivata direzionale di

f in x_0 nella direzione ξ).

Se $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, allora possiamo considerare la variazione seconda di f in x_0 nella direzione ξ

$$\delta^2 f(x_0, \xi) \doteq \phi''(0).$$

Se $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ otteniamo che

$$\delta f(x_0, \xi) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \xi_i \quad (Df(x_0) \cdot \xi)$$

$$\delta^2 f(x_0, \xi) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \xi_i \xi_j \quad D^2 f(x_0) \text{ matrice hessiana}$$

$$Df(x_0) = \nabla f(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right)$$

$$D^2 f(x_0) = H_f(x_0) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \right)_{i,j}$$

NOTA: Come vedremo in seguito, le nozioni di variazione prima e

seconda possono essere estese facilmente a funzionali $F: X \rightarrow \mathbb{R}$,
dove $X \subseteq V$, V spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

Questi concetti li useremo nella ricerca di estremali per
funzionali $F: X \rightarrow \mathbb{R}$ del CdV del tipo

$$F(u) = \int_a^b f(x, u(x), u'(x)) dx$$

definite per funzioni $u: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contenute in qualche
sottospazio X di uno spazio funzionale appropriato V , per
esempio $X \subset \mathcal{C}^1([a, b]; \mathbb{R}) = V$.

Ritorniamo al caso delle funzioni $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Anche in questo caso, condizione necessaria per $x_0 \in \Omega$ per
essere un pt. minimo locale per f è

$$\delta f(x_0, \xi) = 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n,$$

che è equivalente a

$$Df(x_0) = 0 \quad (\nabla f(x_0) = 0)$$

(cioè x_0 deve essere un punto critico (pt. stazionario) di f).

(segue banalmente dal teorema di Fermat - ricordato a pag. 3 -
applicato a $\phi(t) :]-\delta, \delta[\rightarrow \mathbb{R}$).

Inoltre se $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, e $x_0 \in \Omega$ è un pt. di minimo locale per f ,
allora la variazione seconda $\delta^2 f(x_0, \xi)$ è una forma quadratica
semidefinita positiva in ξ e, equivalentemente, gli autovalori della
matrice hessiana $D^2 f(x_0)$ sono non-negative.

(segue sempre dal caso uni-dim, come sopra)

NOTA : Come nel caso uni-dimensionale queste condizioni non sono sufficienti !!

$$f(x, y) = y^3 \quad \Omega = \mathbb{R}^2$$

$(x, y) = (0, 0)$ non è né un punto di minimo, né un punto di massimo locale per f in Ω .

D'altra parte, se $\forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$\delta f(x_0, \xi) = 0 \quad \delta^2 f(x_0, \xi) > 0 \quad (\text{forma quadratica definita positiva})$$

$$\hookrightarrow (x_0 \text{ pt. critico}; \text{eq. } Df(x_0) = 0)$$

$\hookrightarrow$ (equiv. gli autovalori di $D^2 f(x_0)$ sono positivi)

allora $x_0 \in \Omega$ è un pt. di minimo loc. (stretto) per f , ossia esse sono condizioni sufficienti affinché $x_0 \in \Omega$ sia un pt. di minimo loc. (stretto) per f .

Es. $f(x, y) = x^2 + y^2$ in $\Omega = \mathbb{R}^2$ $(0, 0)$ è pt. di minimo locale (stretto) per f . □

Notiamo nuovamente che quest'ultime condizioni sono sufficienti, ma non necessarie per $x = x_0$ ad essere un pt. di minimo loc. stretto per f .

Es. $f(x, y) = x^4 + y^4$ in $\Omega = \mathbb{R}^2$, $(0, 0)$ è pt. di minimo loc. (stretto) per f , ma $H_f(0)$ è la matrice nulla. □

NOTA: Le considerazioni fatte sulle funzioni convesse $f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ si possono fare anche per le funzioni concave $f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. (vedi pag. 30) □

(B) Brevi commenti storici

Il CdV è uno dei settori classici della matematica. È stato Eulero, guardando un lavoro di Lagrange, a dare a questo campo della matematica questo nome.

Questo campo è principalmente legato al pbm. dell'ottimizzazione (trovare minimi o massimi) di quantità fondamentali — lunghezza, area, volume, tempo, lavoro oppure energie ... in un dominio appropriato di funzioni (problematiche legate a vari rami delle scienze). Interessi più recenti hanno aggiunto a questa lista anche — costo, efficienza

Siamo interessati non solo ai valori estremi che possono essere raggiunti, ma anche al metodo (o metodi) con i quali si ottengono questi valori.

- a) Uno dei pbm. più vecchi del CdV è la disuguaglianza isoperimetrica ^(*) (vedi pag. 17). Una variante di questa disuguaglianza è nota come il pbm. di Didone ^(*) (semi-storica principessa fenice e poi regina di Cartagine).

- (*) Queen Dido's Conjecture. According to Virgil, Dido (of Carthage), when told that her province would consist only of as much land as could be enclosed by the hide of a bull, tore the hide into thin strips and used them to form a long rope of length l with ends anchored to the "straight" Mediterranean coast as shown in Figure 1.11. The rope itself was arranged in a semicircle which she believed would result in the maximum "enclosed" province. And thus was Carthage founded—in mythology.

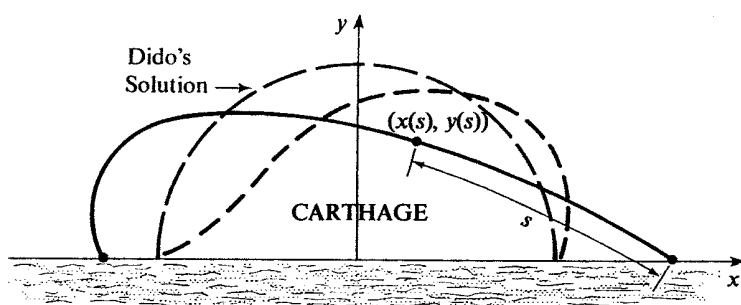


Figure 1.11

vedi [T], pag. 32

- (*) trovare l'area massima che può essere inclusa da una curva di perimetro fissato.

- Zenodorus (200 a.C.) ha provato la disug. isoperimetrica per i poligoni.

bibliografia
per niente
esauritiva!

Contributi significativi : Archimede, Euler, Galileo, Legendre,
Riccati, Simpson, Steiner.

Prima dimostrazione "moderna" : Weierstrass $\rightarrow$ Carathéodory,
Lebesgue, Minkowski, Schwarz, Sturm
Tonelli

- b) 17.mo sec. (Europa): lavoro di Fermat (1662) in ottica geometrica (vedi [BGH] pag. 39)
pbm. di Newton (1685) : studio di corpi che
si muovono in un fluido. (vedi [BGH] pag. 40)
pbm. della brachistocrona (vedi pag. 13)
formulato da Galileo (1638).

"nascita" del CdV

- Questo pbm. ha avuto una forte influenza sullo sviluppo del
Calcolo delle Variazioni. Nel 1697 Johann Bernoulli lancia
una sfida alla comunità matematica, in cui si chiedeva di trovare
la brachistocrona, cioè la curva lungo la quale un punto
materiale scende da un punto A ad un pt. B, situato sullo
stesso piano verticale e ad una quota inferiore, nel minor tempo possibile.

Groningen,
January 1, 1697

AN ANNOUNCEMENT

"I, Johann Bernoulli, greet the most clever mathematicians in the world. Nothing is more attractive to intelligent people than an honest, challenging problem whose possible solution will bestow fame and remain as a lasting monument. Following the example set by Pascal, Fermat, etc., I hope to earn the gratitude of the entire scientific community by placing before the finest mathematicians of our time a problem which will test their methods and the strength of their intellect. If someone communicates to me the solution of the proposed problem, I shall then publicly declare him worthy of praise."

È stato risolto da J. Bernoulli (e poi anche da Jakob Bernoulli), da Leibniz e Newton (il calcolo differenziale ed integrale di quest'ultimi ha permesso un approccio unificato a questo tipo di problemi!).

Un fondamentale passo in avanti è stato fatto con il lavoro di Euler e Lagrange, che hanno trovato un modo sistematico per trattare problemi in questo campo introducendo la ben nota eq. di Euler-Lagrange.

lavori in questa direzione: Bolza, Carathéodory, Hahn, Hamilton, Hilbert, Jacobi, Legendre, Mayer, Weierstrass ...

c) 19. mo sec. : il pbm. più noto del CdV è lo studio dell'integrale di Dirichlet (legame con l'eq. di Laplace).

lavori di: Dirichlet, Gauss, Riemann

Hilbert (ha risolto il pbm. a cavallo del 20. mo sec).

poi Lebesgue, Tonelli.

Il loro metodo per risolvere il pbm. erano, essenzialmente, quelli ora noti come metodi diretti del CdV.

Oss. che la risoluzione di tale pbm. è stato molto importante per lo sviluppo dell'Analisi in generale, per l'Analisi Funzionale, la teoria della misura, teoria delle distribuzioni, Spazi di Sobolev o PDE.

Altro pbm. molto importante: il pbm. delle superfici minime (vastissima bibliografia)! (trovare tra tutte le superfici $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ (o più generale $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 2$) con frontiera assegnata $\partial \Sigma = \Gamma$, dove Γ è una curva chiusa, una di area minima

metodi classici (o indiretti)

bibliografia per niente esaustiva!

metodi diretti

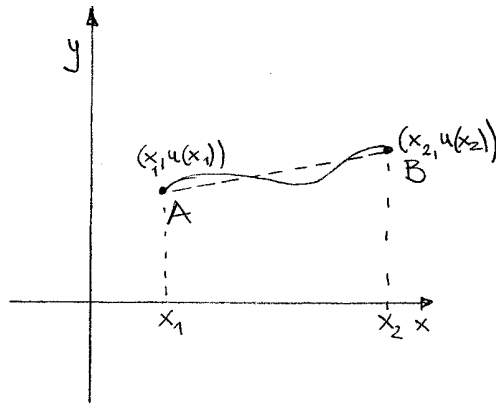
pag. 15
[D]
Pbm. di Plateau

③ Esempi di modellizzazione mediante funzionali integrali

(esempi classici dall'Analisi, Geometria, Matematica applicata in Fisica, Economia ...)

Esempio 1: curva di minima lunghezza (caso non-parametrico)

Vediamo nel piano ($\text{in } \mathbb{R}^2$) ; analogamente in $\mathbb{R}^n$ } vedi [T] pag. 14-17
più complesso sulla sfera



Vogliamo congiungere A con B
con una curva di classe $C^1([x_1, x_2])$ che
minimizza il funzionale lunghezza
$$L(u) = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (u'(x))^2} dx$$
 tra tutte

le curve ammissibili, cioè trovare una soluzione per il reg. pbm.

di minimo

(P1)

$$\min \left\{ L(u) = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (u'(x))^2} dx : u \in X \right\}$$

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x, u(x), u'(x)) dx$$

$$\text{con } f(x, u, \xi) = f(\xi) = \sqrt{1 + \xi^2}$$

con $u \in X = \text{spazio delle funzioni ammissibili}$ (per esempio, $u \in C^1([x_1, x_2])$
con $u(x_1) = u_1, u(x_2) = u_2$ assegnati).

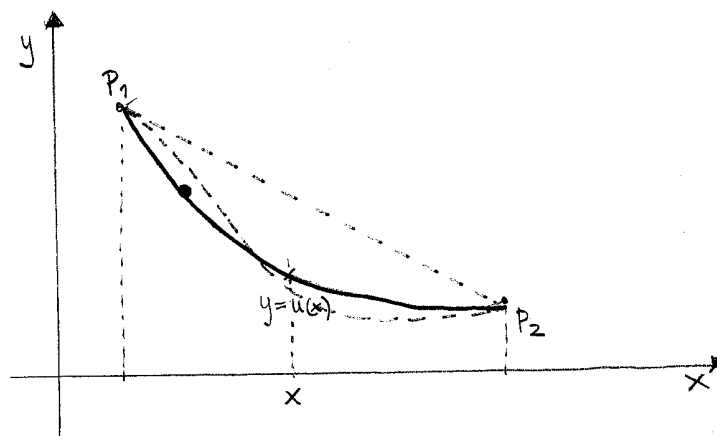
Vedi altri pbm. delle geodetiche [T] pag. 14-17 (caso parametrico).

(NOTA: si ottiene, usando l'eq. di Eulero, che la soluzione è data dalla retta congiungente A e B).

Esempio 2: Brachistocrona (dal greco "chronos" = tempo, e "brachistos", superlativo di "brachys" = breve)

o problema della più rapida discesa - Johann Bernoulli 1697)

Dati due punti P_1 e P_2 in un piano verticale (il primo a quota maggiore), determinare il cammino liscio che li congiunge lungo il quale un punto materiale discende da P_1 a P_2 per effetto della sola gravità nel più breve tempo possibile.



Sia $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ e sia

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

la legge oraria del moto del punto. Supponiamo che il tempo $t = 0$ corrisponda alla posizione iniziale P_1 . Lo spazio percorso fino all'istante t è

$$s = s(t) = \int_0^{x(t)} \sqrt{1 + (u'(x))^2} dx$$

s = ascissa curvilinea
(lunghezza d'arco lungo la curva)

Per tanto la velocità (scalare) è

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = \sqrt{1 + (u'(x(t)))^2} x'(t),$$

da cui

$$(B1) \quad x'(t) = \frac{v(t)}{\sqrt{1 + u'(x(t))^2}}.$$

Del resto possiamo calcolare v utilizzando la conservazione dell'energia: se m è la massa del punto e $v_0 = v(0)$ la velocità iniziale, allora

$$\frac{1}{2} m v_0^2 + m g y_1 = \frac{1}{2} m v(t)^2 + m g y(t), \quad (*)$$

da cui, tenendo conto che $y(t) = u(x(t))$,

$$v(t)^2 = v_0^2 + 2g y_1 - 2g u(x(t)) = 2g (H - u(x(t)))$$

$$\text{dove } H = \frac{v_0^2}{2g} + y_1.$$

Sostituiamo nella (B1) e otteniamo

$$x'(t) = \frac{\sqrt{2g (H - u(x(t)))}}{\sqrt{1 + u'(x(t))^2}}.$$

Possiamo assumere che la funzione $x(t)$ sia invertibile; per l'inversa $t'(x)$ risulta

$$t'(x) = \frac{1}{x'(t)} = \frac{\sqrt{1 + (u'(x))^2}}{\sqrt{2g (H - u(x))}}.$$

Il tempo impiegato per percorrere l'arco fra P_1 e P_2 si ottiene ora per integrazione:

$$(B2) \quad T(u) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1 + (u'(x))^2}}{\sqrt{H - u(x)}} dx.$$

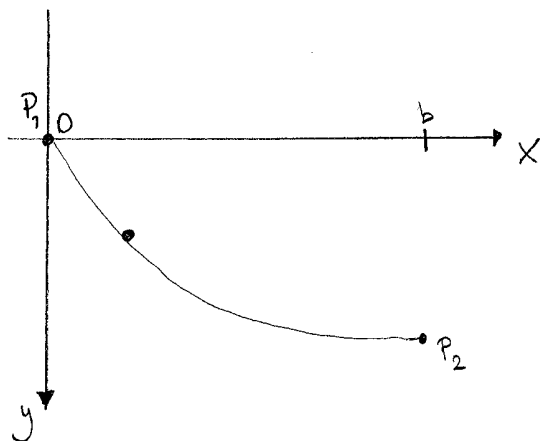
Si avrà quindi il problema di minimo

$$\min \left\{ T(u) : u(x_1) = y_1, \quad u(x_2) = y_2 \right\}.$$

* g = accelerazione gravitazionale considerata costante.

NOTA : • Convenire traslare il punto P_1 nell'origine che diventa quindi $(0,0)$;

- supporre la velocità iniziale v_0 (in P_1) uguale a 0 ;
- inrehire l'orientazione dell'asse delle ordinate.



In questo modo il problema di minimo diventa

$$(P2) \quad \min \left\{ T(u) = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^b \sqrt{\frac{1+(u'(x))^2}{u(x)}} dx}_{\int_0^b f(x, u(x), u'(x)) dx} : u \in X \right\}$$

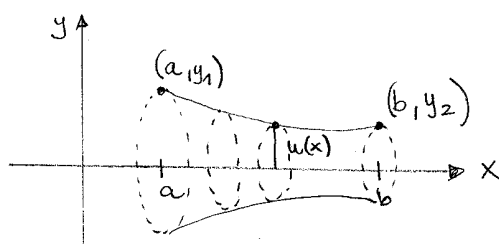
$$\text{con } f(x, u, \xi) = f(u, \xi) = \frac{\sqrt{1+\xi^2}}{\sqrt{2g} \sqrt{u}}$$

con $u \in X =$ spazio delle funzioni ammissibili (per esempio, $u \in C^1([0,b])$: $u(0)=0$, $u(b)=\beta$, $u(x)>0 \ \forall x \in]0,b[$)
 $\beta > 0$ assegnato

Il cammino liscio ricercato si rivelerà una cicloide.

("kyklos" = cerchio , "oeides" = forma , cioè che è fatto da un cerchio)

Esempio 3: Superficie di rivoluzione di area minima



Dobbiamo trovare tra tutte le superfici di rivoluzione della forma

$$r(x, \vartheta) = (x, u(x) \cos \vartheta, u(x) \sin \vartheta)$$

con $u(a) = y_1$, $u(b) = y_2$ fissati, quella di area minima.

La formula dell'area della superficie di rotazione generata da una curva $y = u(x)$ (> 0 su $[a, b]$) è data da

$$S(u) = 2\pi \int_a^b u \sqrt{1 + (u'(x))^2} dx,$$

e quindi il ns. problema di area minima si riduce a trovare una soluzione del pblm. di minimo

$$(P3) \quad \min \left\{ S(u) = 2\pi \int_a^b u \sqrt{1 + (u'(x))^2} dx : u \in X \right\}$$

$$\int_a^b f(x, u(x), u'(x)) dx$$

$$\text{con } f(x, u, \xi) = f(u, \xi) = 2\pi u \sqrt{1 + \xi^2}$$

con $u \in X =$ spazio delle funzioni ammissibili (per esempio, $u \in C^1([a, b])$ con $u(a) = y_1$, $u(b) = y_2$, $u > 0$).

NOTA: Soluzioni di questo problema, quando esistono, sono catenoidi.



Se $b - a$ è molto più grande di y_1 e y_2 , va a mancare la soluzione !!

Esempio 4. Disuguaglianza isoperimetrica

Sia $A \subset \mathbb{R}^2$ un aperto limitato di $\mathbb{R}^2$, la cui frontiera, ∂A , è una curva chiusa, semplice e sufficientemente regolare. Se $L(\partial A)$ denota la lunghezza della frontiera e $M(A)$ la misura (area) di A , allora la disuguaglianza isoperimetrica si scrive

$$4\pi M(A) \leq [L(\partial A)]^2;$$

L'uguaglianza è vera $\Leftrightarrow A$ è un disco (i.e. ∂A è la circonferenza).

Questo pbm. si risolve parametrizzando la curva

$$\partial A = \{ u: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 : u(x) = (u_1(x), u_2(x)) \}$$

non più scalare!!

e ponendo

$$L(\partial A) = L(u) = \int_a^b \sqrt{u_1'(x)^2 + u_2'(x)^2} dx$$

$$M(A) = M(u) = \frac{1}{2} \int_a^b (u_1 u_2' - u_2 u_1') dx = \int_a^b u_1 u_2' dx.$$

Il pbm. si riduce allora a

(P4) $\min \{ L(u) : M(u) = 1; u(a) = u(b) \} = 2\sqrt{\pi}.$

(vedi generalizzazione [D] pag. 7)

Vogliamo allora considerare funzionali integrali (integrali variazionali) della forma

$$F(u) = \int_a^b f(x, u(x), u'(x)) dx$$

con $u \in X$, e studiare il pbm. di minimo $\inf_{u \in X} F(u)$ con opportune ipotesi su $f: [a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (integrando variazionale, funzione di Lagrange, oppure Lagrangiana) e certi spazi funzionali X .

① Metodi indiretti e metodi diretti

Per studiare pbm. del tipo

$$② \quad \inf_{u \in X} F(u) \quad \left(= \min_{u \in X} F(u) \text{ se il minimo esiste} \right)$$

considerati nella parte precedente, ci sono sostanzialmente due modi per procedere: i metodi indiretti (classici) e i metodi diretti.

Nei cosiddetti "metodi indiretti" classici l'esistenza di una soluzione è sostanzialmente data per scontata e il pbm. è ridotto alla sua individuazione, secondo lo schema:

ricordate
l'ottimizzazione
in $\mathbb{R}^n$!

$$u \text{ soluzione di } ② \Rightarrow u \text{ soddisfa "C.N. di ottimalità"} \\ \text{[in primis l'eq. di Eulero-Lagrange]}$$

Nel caso di più "candidati soluzione" (*) dobbiamo disporre di criteri che assicurino l'ottimalità, cioè:

$$u \text{ soddisfa l'eq. di Eulero-Lagrange} \\ + \text{ "C.S. di ottimalità"} \Rightarrow u \text{ soluzione di } ②.$$

- I metodi classici sono stati introdotti da: Eulero, Hamilton, Hilbert, Jacobi, Lagrange, Legendre, Weierstrass ed altri.

C.S. di ottimalità: convessità; criteri di Legendre; campi di Weierstrass; condizioni di Weierstrass-Erdman; condizioni di Jacobi ed altri.

- (*) se abbiamo una convessità opportuna, le soluzioni di Eulero-Lagrange sono minimi; altrimenti possiamo solo dire che sono punti stazionari (critici) di F .

La consapevolezza della completezza, e non ammissibile^(*), assunzione di esistenza di una soluzione si fece strada verso la fine del XIX secolo (vedi esempio di Weierstrass sotto).

I metodi diretti basati sulla generalizzazione del Teorema di Weierstrass (compattazione e semicontinuità $\Rightarrow$ Teorema di Weierstrass)

sono una risposta all'esigenza di "dimostrare direttamente" l'esistenza di un minimo, senza passare tramite la costruzione di condizioni differenziali.

Si considera una succ. minimizzante $(u_n) \subset X$:

$$F(u_n) \rightarrow \inf \{F(u) : u \in X\}$$

Sotto opportune ipotesi su F , si dimostra che u_n è compatta in X , cioè

$$u_n \xrightarrow{n} \bar{u} \in X \quad (\text{a meno di sottoseq.})$$

Se F è s.c.i., allora

$$F(\bar{u}) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} F(u_n)$$

provando così che $\bar{u}$ è un minimo di (P) .

- Il metodo diretto è stato introdotto da Hilbert, Lebesgue, Tonelli. A partire da Tonelli, la scuola italiana di CdV si è in gran parte sviluppata in questa direzione.
- Il metodo utilizzato porta ad un ampliamento dello spazio funzionale in cui ricercare le soluzioni, introducendo richieste più deboli di differenziabilità (spazi di Sobolev, spazi a variazione limitata, ...). Ciò parallelamente a quanto avviene per le eq. differenziali. Si apre pertanto il problema della regolarità.

(*) Vedi pag. 20.

NOTA sull'esistenza di minimi (~~≠~~)

- ② Esempio di Weierstrass: Vediamo un esempio di $F \geq 0$ (abbiamo una stima dal basso finita), per il quale non esiste minimo!

Consideriamo l'integrale variazionale

$$F(u) = \int_{-1}^1 x^2 (u'(x))^2 dx,$$

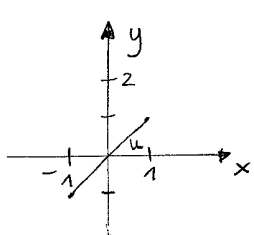
e vogliamo studiare

$$\inf_{u \in X} F(u),$$

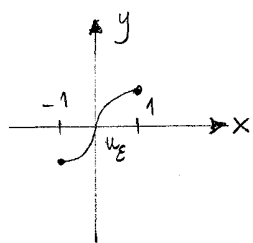
dove $X = \{u \in \mathcal{C}^1([-1,1]) : u(-1) = -1, u(1) = 1\} \subset \mathcal{C}^1([-1,1])$.

Ovviamente abbiamo $\inf_{u \in X} F(u) \geq 0$.

Consideriamo $u(x) = x$, allora $u \in X$ e



$$\inf_{u \in X} F(u) \leq \int_{-1}^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{2}{3}.$$



$\forall \epsilon > 0, x \in [-1,1]$ Consideriamo

$$u_\epsilon(x) = \frac{\arctg \frac{x}{\epsilon}}{\arctg \frac{1}{\epsilon}}$$

fattore per ottenere le condizioni al bordo!!

(nota: fissato $x > 0$
per $\epsilon \rightarrow 0^+$ $\frac{x}{\epsilon} \rightarrow +\infty$
 $\Rightarrow \arctg \frac{x}{\epsilon} \rightarrow \frac{\pi}{2}$

e quindi $u_\epsilon(x) \rightarrow 1$, cioè tende ad appiattirsi!!

$$\text{Abbiamo } u'_\epsilon(x) = \frac{1}{\arctg \frac{1}{\epsilon}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x^2}{\epsilon^2}} \cdot \frac{1}{\epsilon}$$

$$= \frac{\epsilon}{\left(\arctg \frac{1}{\epsilon}\right) (\epsilon^2 + x^2)}$$

$$u'_\epsilon(0) = \frac{1}{\epsilon \left(\arctg \frac{1}{\epsilon}\right)} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0^+} +\infty.$$

Ne segue

$$\begin{aligned}
 F(u_\varepsilon) &= \int_{-1}^1 x^2 \frac{\varepsilon^2}{\left(\operatorname{arctg} \frac{1}{\varepsilon}\right)^2 (\varepsilon^2 + x^2)^2} dx = \\
 &= \frac{\varepsilon^2}{2 \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{\varepsilon}\right)^2} \int_{-1}^1 x \frac{2x}{(\varepsilon^2 + x^2)^2} dx = \\
 &= \frac{\varepsilon^2}{2 \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{\varepsilon}\right)^2} \left[x \left(\frac{-1}{\varepsilon^2 + x^2} \right) \right]_{-1}^1 + \int_{-1}^1 \frac{1}{\varepsilon^2 + x^2} dx \Bigg] \\
 &= \frac{\varepsilon^2}{2 \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{\varepsilon}\right)^2} \left[-\frac{2}{\varepsilon^2 + 1} + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{-1}^1 \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^2} dx \right] \\
 &= \frac{\varepsilon^2}{2 \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{\varepsilon}\right)^2} \left[-\frac{2}{\varepsilon^2 + 1} + \frac{1}{\varepsilon} \left[\operatorname{arctg} \frac{x}{\varepsilon} \right]_{-1}^1 \right] = \\
 &= \frac{\varepsilon^2}{2 \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{\varepsilon}\right)^2} \left(\frac{-2}{\varepsilon^2 + 1} + \frac{2}{\varepsilon} \operatorname{arctg} \frac{1}{\varepsilon} \right) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} 0
 \end{aligned}$$

Quindi $\inf_{u \in X} F(u) = 0$.

D'altra parte $\nexists u \in X$ t.c. $F(u) = 0$. Infatti, se fosse $F(u) = 0$, allora si avrebbe $u'(x) \equiv 0 \ \forall x \in [-1, 1]$ (altrimenti per continuità seguirebbe $F(u) > 0$) e quindi $u(x) \equiv \text{costante}$, ma questo non è possibile per le condizioni al bordo!

□

NOTA: la funzione integranda $f(x, \xi) = x^2 \xi^2$ ha la proprietà che $\xi \mapsto f(x, \xi)$ è convessa $\forall x \in [-1, 1]$!

- ⑤ Consideriamo un altro esempio di integrale variazionale (limitato inferiormente e limitato superiormente!) che non ammette né minimo né massimo!

Consideriamo

$$F(u) = \int_0^1 \frac{1}{1 + u'(x)^2} dx,$$

e vogliamo studiare

$$\inf_{u \in X} F(u),$$

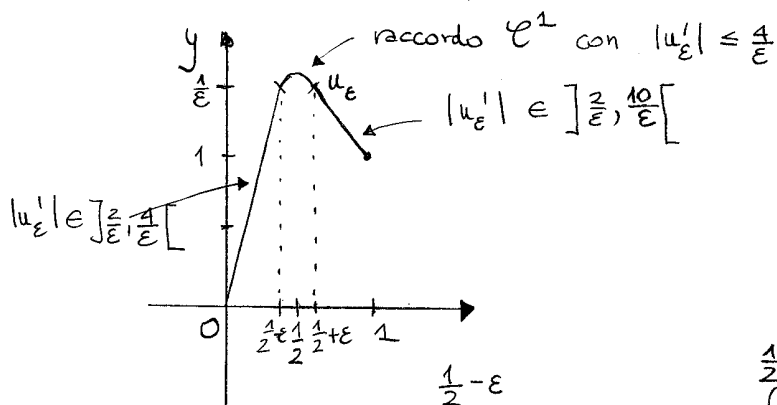
dove $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0)=0, u(1)=1\} \subset \mathcal{C}^1([0,1])$.

Ovviamente abbiamo

$$0 < F(u) < 1 \quad \forall u \in X.$$

→ Proviamo che $\inf_{u \in X} F(u) = 0$.

Per $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}$ possiamo costruire $u_\varepsilon \in X$ con $u_\varepsilon' \rightarrow +\infty$



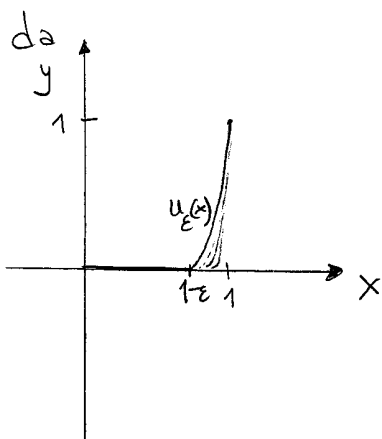
$$\begin{aligned} \text{Allora } F(u_\varepsilon) &\leq \int_0^{\frac{1}{2}-\varepsilon} \frac{1}{1 + \frac{1}{\varepsilon^2}} dx + \int_{\frac{1}{2}-\varepsilon}^{\frac{1}{2}+\varepsilon} 1 dx + \int_{\frac{1}{2}+\varepsilon}^1 \frac{1}{1 + \frac{1}{\varepsilon^2}} dx \\ &= \frac{2 \left(\frac{1}{2} - \varepsilon \right)}{1 + \frac{1}{\varepsilon^2}} + 2\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} 0 \end{aligned}$$

Quindi $\inf_{u \in X} F(u) = 0$. D'altra parte, $\nexists u \in X : F(u) = 0$.

Infatti, dovrebbe essere $\frac{1}{1+u'(x)^2} = 0 \quad \forall x \in [0,1]$. Assurdo!

→ Proviamo che $\sup_{u \in X} F(u) = 1$!

Consideriamo, per $\varepsilon > 0$, $u_\varepsilon \in X$



$$u_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0, 1-\varepsilon] \\ \frac{(x-1+\varepsilon)^2}{\varepsilon^2} & \text{se } x \in [1-\varepsilon, 1] \end{cases}$$

Abbiamo $u'_\varepsilon(x) = \frac{2(x-1+\varepsilon)}{\varepsilon^2} \text{ su }]1-\varepsilon, 1[$

$$\begin{aligned} F(u_\varepsilon) &= 1-\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2} \int_{1-\varepsilon}^1 \frac{\frac{2}{\varepsilon^2}}{1 + \left[\frac{2(x-1+\varepsilon)}{\varepsilon^2} \right]^2} dx \\ &= 1-\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2} \left[\arctan \left[\frac{2(x-1+\varepsilon)}{\varepsilon^2} \right] \right]_{1-\varepsilon}^1 \\ &= 1-\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2} \arctan \frac{2}{\varepsilon} \rightarrow 1. \end{aligned}$$

Quindi $\sup_{u \in X} F(u) = 1$. D'altra parte, $\nexists u \in X : F(u) = 1$.

Infatti, questo chiederebbe $u'(x) \equiv 0$, ossia $u(x) \equiv \text{cost}$, ma questo non è possibile per le condizioni al bordo!

OSSERVAZIONE :

Abbiamo già osservato a pag. 6-7 che la variazione prima e la variazione seconda possono essere "estere" a funzionali

$$F: X \rightarrow \mathbb{R}$$

dove $X \subseteq V$, V spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. A questo scopo, prendiamo $u_0 \in X$ e qualche $v \in V$ e supponiamo che $u = u_0 + tv$, $|t| < \delta$ è contenuto in X per qualche $\delta > 0$. Allora possiamo definire la funzione

$$\phi(t) \doteq F(u_0 + tv) \quad |t| < \delta$$

e, se ϕ è derivabile in $t=0$ (ossia $\phi'(0) \exists$), diciamo

variazione prima di F in u_0 nella direzione di v (o rispetto a v)

il valore

(simbolo introdotto da
Lagrange)

$$\delta F(u_0, v) = \phi'(0).$$

(*)

Inoltre, se $\phi'(t)$ esiste per $|t| < \delta$ ed esiste $\phi''(0)$, definiamo la variazione seconda di F in u_0 nella direzione di v

$$\delta^2 F(u_0, v) = \phi''(0).$$

Supponiamo ora che, come appena definito, δF e $\delta^2 F$ esistono in $u_0 \in X$ per ogni direzione v contenuto in un sottospazio Z di V . Inoltre, supponiamo che u_0 sia un pt. di minimo del funzionale $F: X \rightarrow \mathbb{R}$, ossia

$$F(u_0) \leq F(u) \quad \forall u \in X$$

allora possiamo concludere

$$\delta F(u_0, v) = 0, \quad \delta^2 F(u_0, v) \geq 0 \quad \forall v \in Z.$$

(anzi basta
 $F(u_0) \leq F(w)$
con $w - u_0 = tv$, per
 $|t| < \delta$)

Vogliamo allora applicare questa osservazione a funzionali

(*) NOTA : Se $\frac{d}{dt} F(u_0 + tv)$ esiste per piccoli $t \neq 0$ ed è continua in $t=0$, allora $\delta F(u_0, v) = \left. \frac{d}{dt} F(u_0 + tv) \right|_{t=0}$

$$F: X \rightarrow \mathbb{R}$$

$$F(u) = \int_a^b f(x, u(x), u'(x)) dx$$

$a, b \in \mathbb{R}$
 $a < b$ fissati

con $f: [a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$(x, u, \xi) \mapsto f(x, u, \xi)$$

(che supporremo regolare quanto basta: preciseremo in seguito!)

e $u: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contenuto in un sottoinsieme X di uno spazio di funzioni appropriato V , diciamo, $V \subset \mathcal{C}^1([a, b])$.

Esercizio 1: Consideriamo $X = V = \mathcal{C}([a, b])$ e $F(u) = \int_a^b (\sin^3 x + u^2(x)) dx$ è definito $\forall u \in V$.

$$f(x, u, \xi) = f(x, u) = \sin^3 x + u^2$$

Calcolate $\delta F(u, v)$ $\forall u, v \in V$.

Fissato $u, v \in V$ e $t \neq 0$, $u + tv \in V$ ($\mathcal{C}([a, b])$ è uno spazio vettoriale), abbiamo

$$F(u + tv) = \int_a^b [\sin^3 x + (u + tv)^2(x)] dx$$

e quindi,

$$\begin{aligned} \frac{F(u + tv) - F(u)}{t} &= \frac{1}{t} \int_a^b [(u + tv)^2(x) - u^2(x)] dx = \\ &= \frac{1}{t} \int_a^b [\cancel{u^2(x)} + 2tu(x)v(x) + t^2v^2(x) - \cancel{u^2(x)}] dx \\ &= 2 \int_a^b u(x)v(x) dx + t \int_a^b v^2(x) dx. \end{aligned}$$

Osserviamo che, essendo $u, v \in \mathcal{C}([a, b])$, ogni integrale al membro destro dell'uguaglianza è finito, e possiamo

passare al limite per $t \rightarrow 0$ (esso esiste!). Abbiamo allora dalla definizione sopra

$$\delta F(u, v) = 2 \int_a^b u(x) v(x) dx \quad \forall u, v \in \mathcal{C}([a, b]).$$

Vogliamo ora calcolare $\delta F(u, v)$ sfruttando la NOTA a fondo pag. 24.

Consideriamo per $t \neq 0$

$$\begin{aligned} F(u+tv) &= \int_a^b (\sin^3 x + (u+tv)^2(x)) dx = \\ &= \int_a^b [\sin^3 x + u^2(x)] dx + 2t \int_a^b u(x) v(x) dx + t^2 \int_a^b v^2(x) dx \end{aligned}$$

Calcoliamo ora, per u, v fissati, la derivata

$$\frac{d}{dt} F(u+tv) = 2 \int_a^b u(x) v(x) dx + 2t \int_a^b v^2(x) dx.$$

$$\text{Risulta } \left. \frac{d}{dt} F(u+tv) \right|_{t=0} = 2 \int_a^b u(x) v(x) dx \quad \forall u, v \in \mathcal{C}([a, b]).$$

□

NOTA: In generale, è tecnicamente più facile usare il secondo metodo per calcolare δF nei casi concreti semplicemente perché siamo più familiari con le tecniche di derivazione di funzioni in una variabile.

Comunque il secondo metodo, come visto qui, richiede che

$\frac{d}{dt} F(u+tv)$ esista per $t \neq 0$ piccoli e che sia continua in $t=0$.

Al contrario, il primo metodo richiede solo l'esistenza della derivata in $t=0$.

Esercizio 2: Consideriamo $X=V=C^1([a,b])$. Fissato $p(x) \in C([a,b])$ consideriamo

$$F(u) = \int_a^b p(x) \sqrt{1 + u'(x)^2} dx$$

$$f(x, u, \xi) = f(x, \xi) = p(x) \sqrt{1 + \xi^2}$$

definito $\forall u \in V$.

Calcolare $\delta F(u, v)$ $\forall u, v \in V$.

• — • — • — • — • — • — • —

Fissato $u, v \in V$ vogliamo usare il secondo metodo per calcolare $\delta F(u, v)$. Abbiamo per $t \neq 0$

$$F(u+tv) = \int_a^b p(x) \sqrt{1 + (u+tv)'(x)^2} dx.$$

Per calcolare la derivata di $F(u+tv)$ rispetto a t dobbiamo derivare sotto il segno d'integrale (vedi sotto !! pag. 28)

Otteniamo allora

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} F(u+tv) &= \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} \left[p(x) \sqrt{1 + (u+tv)'(x)^2} \right] dx \\ &= \int_a^b p(x) \frac{(u+tv)'(x) v'(x)}{\sqrt{1 + (u+tv)'(x)^2}} dx \end{aligned}$$

(e questo è giustificato per la continuità di quest'ultimo integrando in $[a,b] \times \mathbb{R}$). Si ottiene allora

$$\delta F(u, v) = \left. \frac{d}{dt} F(u+tv) \right|_{t=0} = \int_a^b p(x) \frac{u'(x) v'(x)}{\sqrt{1 + u'(x)^2}} dx.$$



Qualche risultato preliminare

Teorema (derivazione sotto il segno di integrale): Sia $g: [a,b] \times [c,d] \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x,t) \mapsto g(x,t)$
 una funzione continua su $E = [a,b] \times [c,d]$ insieme con la derivata
 parziale $\frac{\partial g}{\partial t}(x,t)$. Allora $G(t) = \int_a^b g(x,t) dx$ è di classe $\mathcal{C}^1([c,d])$ e

$$G'(t) = \int_a^b \frac{\partial g}{\partial t}(x,t) dx.$$

Dim. Fissiamo $t \in [c,d]$ e per h sufficientemente piccolo, consideriamo
 il rapporto incrementale

$$\begin{aligned} \frac{G(t+h) - G(t)}{h} &= \int_a^b \frac{g(x,t+h) - g(x,t)}{h} dx = \\ &= \int_a^b \frac{\partial g}{\partial t}(x,t) dx + \int_a^b \left[\frac{g(x,t+h) - g(x,t)}{h} - \frac{\partial g}{\partial t}(x,t) \right] dx \\ &\stackrel{\uparrow}{=} \int_a^b \frac{\partial g}{\partial t}(x,t) dx + \int_a^b \left[\frac{\partial g}{\partial t}(x, t + \theta h) - \frac{\partial g}{\partial t}(x,t) \right] dx \end{aligned}$$

teorema del valor medio di
 Lagrange

con $\theta = \theta(x,t,h)$, $0 < \theta < 1$.

Poiché, per ipotesi, $\frac{\partial g}{\partial t}$ è uniformemente continua in E

(nota: essendo continua su un compatto!!), fissato $\varepsilon > 0$

$\exists \delta > 0$ tale che se $|h| < \delta$

$$\left| \frac{\partial g}{\partial t}(x, t + \theta h) - \frac{\partial g}{\partial t}(x,t) \right| < \varepsilon.$$

Allora abbiamo

$$\begin{aligned} \left| \frac{G(t+h) - G(t)}{h} - \int_a^b \frac{\partial g}{\partial t}(x,t) dx \right| &\leq \int_a^b \left| \frac{\partial g}{\partial t}(x, t + \theta h) - \frac{\partial g}{\partial t}(x,t) \right| dx \\ &\leq \varepsilon(b-a). \end{aligned}$$

Dall'arbitrarietà di ε segue dunque

$$G'(t) = \int_a^b \frac{\partial g}{\partial t}(x, t) dx.$$

Dalla continuità di $\frac{\partial g}{\partial t}(x, t)$ su E segue poi la continuità di $G'(t)$ e quindi $G \in \mathcal{C}^1([c, d])$.

□

Lemma (fondamentale del Calcolo delle Variazioni): Sia $g \in \mathcal{C}([a, b])$

una funzione tale che

$$\int_a^b g(x) v(x) dx = 0$$

$$\forall v \in \mathcal{C}^1([a, b]), v(a) = v(b) = 0.$$

Allora $g \equiv 0$ su $[a, b]$.

Dim. Supponiamo, per assurdo, che esista $x_0 \in]a, b[$ t.c. $g(x_0) \neq 0$.

Supponiamo, per esempio, $g(x_0) > 0$.

Dalla continuità di g si ha che $\exists \delta > 0$ t.c.

$$g(x) > \frac{g(x_0)}{2} \quad \text{in} \quad \underbrace{[x_0 - \delta, x_0 + \delta]}_{\substack{\alpha \quad \beta}} \subseteq]a, b[$$

Consideriamo allora

$$v(x) = \begin{cases} [(x - \alpha)(\beta - x)]^2 & \text{se } x \in [\alpha, \beta] \\ 0 & \text{se } x \notin [\alpha, \beta] \end{cases}$$

Abbiamo che $v \in \mathcal{C}^1([a, b])$, $v(a) = v(b) = 0$ e $v(x) \geq 0$ su $[a, b]$

Ne segue che su $[a, b]$ la funzione prodotto $g \cdot v$ è continua, ≥ 0 e non identicamente zero. Allora $\int_a^b g(x) v(x) dx > 0$, contraddicendo l'ipotesi.

Analog. se $g(x_0) < 0$, allora $-g(x_0) > 0$ porta ad una contraddizione, quindi deve essere $g(x_0) = 0 \quad \forall x_0 \in]a, b[$.

Per continuità deve essere anche $g(a) = g(b) = 0$ e quindi

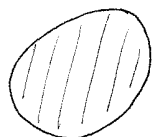
$$g(x) = 0 \quad \forall x \in [a, b].$$

□

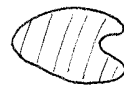
Funzioni convesse

Raccogliamo qui infine i risultati più importanti sulle funzioni convesse.

Def. i) Un insieme $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice convesso se $\forall x, y \in \Omega$ e $\forall \lambda \in [0, 1]$ si ha $\lambda x + (1-\lambda)y \in \Omega$



a) Insieme convesso



b) Insieme non convesso.

ii) Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme convesso. La funzione $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ si dice convessa (su Ω) se

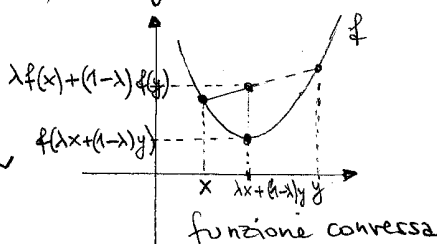
$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

$$\forall x, y \in \Omega \text{ e } \forall \lambda \in [0, 1].$$

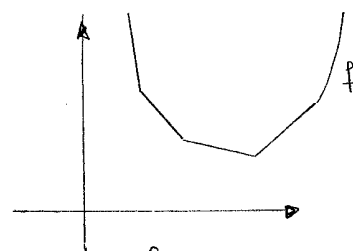
La funzione f si dice strettamente convessa se la disuguaglianza è stretta $\forall x, y \in \Omega, x \neq y$ e $0 < \lambda < 1$.

Es. $n=1$

$\Omega = I \subseteq \mathbb{R}$
intervallo



funzione convessa



funzione convessa,
non strett. convessa. $\square$

Proposizione 1: Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ convesso e sia $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione.

Allora le seguenti proprietà sono equivalenti:

i) f è convessa;

ii) L'epigrafo di f ,

$$\text{epi}(f) \doteq \{(x, z) \in \Omega \times \mathbb{R} : z \geq f(x)\}$$

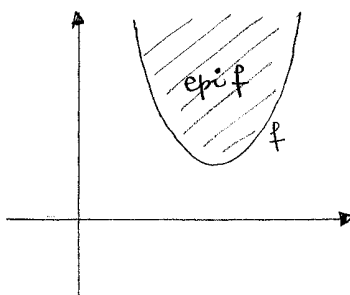
è un insieme convesso di $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$;

iii) $\forall x_1, x_2 \in \Omega$, la funzione $\varphi(\lambda) \doteq f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)$

$\varphi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ è convessa.

Es. $n=1$

$\Omega = I \in \mathbb{R}$
intervallo



$\text{epi } f$ "sopra il grafico"
 $\text{epi } f \subseteq \mathbb{R}^2$

□

Dim. L'equivalenza tra i) e ii) è geometricamente evidente. La verifica dell'equiv. tra i) e iii) è diretta.

□

Teorema 2: Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, convesso e sia $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ di classe $\mathcal{C}^1$.

f è convessa se e solo se

$$f(x) \geq f(x_0) + Df(x_0) \cdot (x - x_0) \quad \forall x, x_0 \in \Omega \quad (*)$$

f è strettamente convessa se e solo se

$$f(x) > f(x_0) + Df(x_0) \cdot (x - x_0) \quad \forall x, x_0 \in \Omega, x \neq x_0.$$

Teorema 3: Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, convesso e sia $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ di classe $\mathcal{C}^2$.

f è convessa se e solo se la forma hermitiana

$$D^2 f(x)(\xi, \xi)$$

è semi-definitiva positiva $\forall x \in \Omega, \forall \xi \in \mathbb{R}^n$. Inoltre, f è strettamente convessa se $D^2 f(x)(\xi, \xi) > 0 \quad \forall x \in \Omega, \forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Chiudiamo questa raccolta di risultati con una disuguaglianza molto importante (vediamo un caso particolare):

*) come già accennato a pag. 6

$$Df(x_0) \cdot (x - x_0) = \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0) \left[\text{prodotto scalare in } \mathbb{R}^n \right]$$

$$D^2 f(x)(\xi, \xi) = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} \xi_i \xi_j$$

o semplicemente

Teorema (disug. di Jensen): Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto e limitato, $u \in L^1(\Omega)$,
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convessa di classe $\mathcal{C}^1$, allora

$$f\left(\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u(x) dx\right) \leq \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f(u(x)) dx.$$

$$|\Omega| = \text{misura di } \Omega = M(\Omega).$$

Dim. Abbiamo $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$f(\alpha) \geq f(\beta) + f'(\beta)(\alpha - \beta).$$

Prendiamo allora $\alpha = u(x)$ e $\beta = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u(x) dx$ e abbiamo $\forall x \in \Omega$

$$f(u(x)) \geq f\left(\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u(x) dx\right) + f'\left(\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u(x) dx\right) \left(u(x) - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u(x) dx\right)$$

Integrando su Ω si ha

$$\int_{\Omega} f(u(x)) dx \geq |\Omega| f\left(\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u(x) dx\right),$$

ovvero la disuguaglianza ricercata. □

Metodi indiretti (classici)

Equazione di Eulero-Lagrange

Sia $f: [a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ di classe $\mathcal{C}^1$

$$(x, u, \xi) \mapsto f(x, u, \xi)$$

e sia $u \in \mathcal{C}^1([a,b])$; consideriamo

$$F(u) = \int_a^b f(x, u(x), u'(x)) dx;$$

Vogliamo studiare il pbm. modello (pbm. standard del CdV)

$$(P) \quad \inf \{ F(u) : u \in \mathcal{C}^1([a,b]), u(a)=\alpha, u(b)=\beta \}.$$

Incominciamo ad osservare che l'insieme delle funzioni ammissibili del nostro pbm. standard sopra,

$$X = \{ u \in \mathcal{C}^1([a,b]) : u(a)=\alpha, u(b)=\beta \}$$

è un sottospazio affine dello spazio vettoriale $\mathcal{C}^1([a,b]) (= V)$:

se $u_0 \in X$ fissata, tutte le altre funzioni ammissibili si ottengono sommandoci gli elementi dello spazio vettoriale

$$\{ u \in \mathcal{C}^1([a,b]) : u(a)=0, u(b)=0 \} \quad (Z \text{ sottospazio di } V)$$

(infatti $u \in X$ si scrive

$$u = u_0 + \underbrace{(u - u_0)}_{\in Z}$$

In particolare, una funzione $u_0 \in X$ realizza il minimo nel nostro pbm. se e solo se $F(u_0) \leq F(u_0 + v) \quad \forall v \in \mathcal{C}^1([a,b]), v(a)=v(b)=0$.

Seguendo lo stesso spirito dell'ottimizzazione di funzioni in $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}^n$), deriviamo nel prossimo teorema l'eq. di Eulero-Lagrange ($\delta F(u_0, v) = 0$, analogo a $F'(x_0) = 0$ in $\mathbb{R}$ ($\nabla F(x_0) = 0$ in $\mathbb{R}^n$)) che deve soddisfare ogni funzione minimizzante $\mathcal{C}^2([a, b])$.

In generale (come nel caso di $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$), le soluzioni dell'eq. di Eulero-Lagrange non sono necessariamente minimi del problema (P) ; loro sono, in generale, solo punti stazionari di F .

Vedremo in seguito, che anche in questo caso, sotto opportune ipotesi di convessità della funzione lagrangiana f , ogni soluzione dell'eq. di Eulero-Lagrange è automaticamente un minimo di (P) .

Teorema 1:

i) Se $f \in \mathcal{C}^1([a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ e se (P) ammette una funzione minimizzante^{*} $u_0 \in X$, allora vale

$$(EED) \quad \int_a^b \left[f_u(x, u_0(x), u_0'(x)) v(x) + f_\xi(x, u_0(x), u_0'(x)) v'(x) \right] dx = 0$$

$$\forall v \in \mathcal{C}^1([a, b]) \text{ con } v(a) = v(b) = 0.$$

ii) Se $f \in \mathcal{C}^2([a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ e se (P) ammette una funzione minimizzante $u_0 \in X \cap \mathcal{C}^2([a, b])$, allora

$$(EE) \quad \frac{d}{dx} \left[f_\xi(x, u_0(x), u_0'(x)) \right] = f_u(x, u_0(x), u_0'(x)) \quad \forall x \in [a, b].$$

NOTA : $f_u = \frac{\partial f}{\partial u}$ $f_\xi = \frac{\partial f}{\partial \xi}$.

^{*} un "estremante"

Osserviamo che (EE) si scrive anche

$$f_{x\xi}(x, u_0(x), u'_0(x)) + f_{u\xi}(x, u_0(x), u'_0(x)) u'_0(x) + f_{\xi\xi}(x, u_0(x), u'_0(x)) u''_0(x) = f_u(x, u_0(x), u'_0(x)) \quad \text{in } [a, b],$$

dove $f_{x\xi} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \xi}$ $f_{u\xi} = \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial \xi}$ $f_{\xi\xi} = \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}$. □

NOTA : L'eq. integrale (EED) prende il nome di equazione di Eulero-Lagrange in forma debole. Una soluzione $u_0 \in \mathcal{C}^1([a, b])$ di (EED) è spesso anche chiamato estremale debole di F (anche se essere estremali non implica essere funzioni estremanti di F !!).

L'eq. differenziale (EE) prende il nome di equazione di Eulero-Lagrange. Una soluzione $u_0 \in \mathcal{C}^2([a, b])$ di (EE) è spesso chiamato estremale di F.

NOTA : i) Sottolineiamo che il teorema precedente non assicura nessun risultato di esistenza !!

ii) Come vedremo in seguito non è sempre ragionevole aspettarsi che un minimizzante di (P) sia di classe $\mathcal{C}^2([a, b])$ *, o anche solo di classe $\mathcal{C}^1([a, b])$ (vedi Es. 1, pag. 36 e Es. 2, pag. 37)

Passiamo ora alla dim. del teorema.

* quest'ipotesi è piuttosto pesante, in quanto a priori non abbiamo informazioni su questa maggiore regolarità di $u_0 \dots$!!! Ma come vedremo inoltre non è nemmeno ragionevole aspettarsi sempre minimizzanti di (P) di classe $\mathcal{C}^1$

Dim. i) Per quanto già osservato a pag. 24, posto $\phi(t) = F(u_0 + t\nu) \quad \forall t \in \mathbb{R}$
con $u_0 \in X$ funz. minimizzante e $\nu \in \mathcal{C}^1([a,b])$ con $\nu(a) = \nu(b) = 0$,
si ha

$$\delta F(u_0, \nu) = \phi'(0) = \left. \frac{d}{dt} F(u_0 + t\nu) \right|_{t=0} = 0,$$

e quindi, derivando sotto il segno d'integrale (pag. 28)

$$\int_a^b \left[f_u(x, u_0(x), u_0'(x)) \nu(x) + f_\xi(x, u_0(x), u_0'(x)) \nu'(x) \right] dx = 0 \quad (\text{EED})$$

$$\forall \nu \in \mathcal{C}^1([a,b]); \nu(a) = \nu(b) = 0.$$

ii) Integrando per parti quest'ultima eq. integrale (EED) otteniamo

$$\int_a^b \left[-\frac{d}{dx} [f_\xi(x, u_0(x), u_0'(x))] + f_u(x, u_0(x), u_0'(x)) \right] \nu(x) dx = 0$$

$\forall \nu \in \mathcal{C}^1([a,b])$ con $\nu(a) = 0 = \nu(b)$. Dal lemma fondamentale
del calcolo delle variazioni (vedi pag. 29) si ha allora l'eq.
di Eulero-Lagrange (EE). ■

- Prima di procedere, rivolgiamo la nostra attenzione al problema della regolarità di estremali deboli e minimizzanti (Es. 1) e al problema di non-esistenza per (P) nello spazio di funzioni $\mathcal{C}^1$ (Es. 2).

Es. 1: Vediamo un esempio di funzione lagrangiana regolare (un polinomio!)
per cui esiste una soluzione $\mathcal{C}^1$ dell'eq. (EED) (c'è un estemale
debole essendo un minimizzante) che non è di classe
 $\mathcal{C}^2$ (quindi non soddisfa (EE)).

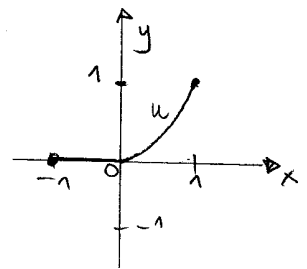
Sia $f: [-1, 1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la lagrangiana definita da
 $f(x, u, \xi) = u^2(2x - \xi)^2 \in \mathcal{C}^2([-1, 1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$

e consideriamo

$$F(u) = \int_{-1}^1 u^2(2x - u'(x))^2 dx \quad \text{con } u \in X = \left\{ u \in \mathcal{C}^1([-1, 1]) : \begin{array}{l} u(-1) = 0, u(1) = 1 \end{array} \right\}$$

Notiamo che $F(u) \geq 0$. Consideriamo

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [-1, 0], \\ x^2 & \text{se } x \in [0, 1]. \end{cases}$$



Allora $u \in X$ e

$$F(u) = \int_{-1}^1 u^2(2x - u'(x))^2 dx = \int_0^1 x^2(2x - 2x)^2 dx = 0.$$

Quindi u è una funzione minimizzante (ed è unica!), cioè
 risolve

$$\inf_{u \in X} F(u)$$

ed è quindi soluzione di (EED) (cioè è un estremo debole di F).

Notiamo però che $u \notin \mathcal{C}^2([-1, 1])$.



Es.2 (di problema variazionale regolare che non ammette minimo in $\mathcal{C}^1$)

- Vediamo ora il caso di una funzione lagrangiana f tale che il corrispondente integrale variazionale F rispetto a condizioni al bordo fissati è minimizzato da funzioni $\mathcal{C}^1$ -a tratti, ma non $\mathcal{C}^1$ e quindi nemmeno $\mathcal{C}^2$. Questo fenomeno - considerato abbastanza paradossale - è stato osservato da Eulero.
- Questo esempio mette in luce il fatto che gli spazi funzionali

$\mathcal{C}^1$ o $\mathcal{C}^2$ non sono affatto gli spazi funzionali naturali, dove ogni p.b.m. variazionale può essere trattato !!

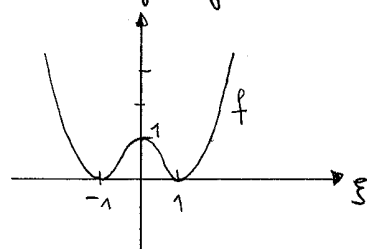
Infatti, fa parte del p.b.m. formulare l'ambiente funzionale giusto e trovare la classe opportuna di "funzioni ammissibili" dove F deve essere minimizzato !!

Paradosso di Eulero! Consideriamo la funzione lagrangiana

$$f(x, u, \xi) = f(\xi) = (\xi^2 - 1)^2$$

e consideriamo $F(u) = \int_0^1 (u'(x)^2 - 1)^2 dx$.

Consideriamo il p.b.m.



$$(P)_X \quad \inf_{u \in X} F(u)$$

$$X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = u(1) = 0\}$$

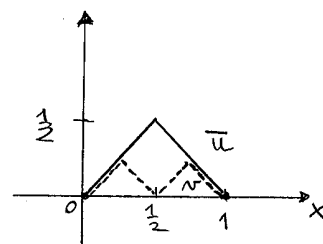
e il p.b.m.

$$(P)_Y \quad \inf_{u \in Y} F(u)$$

$$Y = \{u \in \mathcal{C}_{\text{tratti}}^1([0,1]) : u(0) = u(1) = 0\}.$$

Notiamo che

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 1-x & \text{se } x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$



$\bar{u} \in Y$ e $F(\bar{u}) = 0$. Allora $\inf_{u \in Y} F(u) = F(\bar{u}) = 0$.

(Notiamo che anche la funzione v è una funzione minimizzante per $(P)_Y$.)

$$(*) \quad \mathcal{C}_{\text{tratti}}^1([a,b]) = \left\{ u \in \mathcal{C}([a,b]) : \exists \text{ nr. finito di pt. } a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq b : \right. \\ \left. u \in \mathcal{C}^1([x_i, x_{i+1}]) \text{ ed } \exists \lim_{x \rightarrow x_i^+} u'(x) \in \mathbb{R}, \exists \lim_{x \rightarrow x_i^-} u'(x) \in \mathbb{R} \right\}$$

Ce ne sono infinite funzioni zig-zag minimizzanti!).

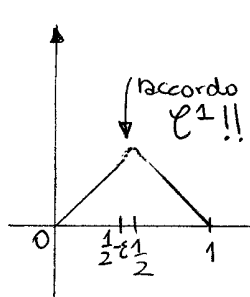
Proviamo ora che

$$\inf_{u \in X} F(u) = 0.$$

Ma in questo caso non ci può essere $u_0 \in X$ t.c. $F(u_0) = 0$.

Infatti si avrebbe che $|u'_0| = 1$ q.o. Ma nessuna funzione $u \in X$ può soddisfare $|u'| = 1$, poiché per la continuità della derivata si avrebbe $u' = 1$ ovunque oppure $u' = -1$ ovunque, e questo non è compatibile con i dati al bordo.

Proviamo allora che $\inf_{u \in X} F(u) = 0$. Fissato $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, consideriamo



$$u_\varepsilon(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [0, \frac{1}{2} - \varepsilon] \\ -\frac{2}{\varepsilon^2} \left(x - \frac{1}{2}\right)^3 - \frac{4}{\varepsilon} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - x + 1 & \text{se } x \in [\frac{1}{2} - \varepsilon, \frac{1}{2} + \varepsilon] \\ 1 - x & \text{se } x \in [\frac{1}{2} + \varepsilon, 1] \end{cases}$$

Allora $u_\varepsilon \in X$ e $F(u_\varepsilon) = \int_0^1 (u'_\varepsilon(x)^2 - 1)^2 dx =$

$$= \int_{\frac{1}{2} - \varepsilon}^{\frac{1}{2} + \varepsilon} (u'_\varepsilon(x)^2 - 1)^2 dx \leq \int_{\frac{1}{2} - \varepsilon}^{\frac{1}{2} + \varepsilon} \left(\underbrace{\left(\frac{25}{9} - 1\right)^2}_{\leq 2} \right) dx = 4\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

$$|u'_\varepsilon(x)| \leq \frac{5}{3}$$

Quindi $\inf_{u \in X} F(u) = 0$.

NOTA: a) L'eq. di Eulero-Lagrange (EE) è

$$\frac{d}{dx} \left[f_{u'}(u'(x)) \right] = 0, \text{ ossia } \frac{d}{dx} \left[u'(u'^2 - 1) \right] = 0.$$

Essa ha $u_0 \equiv 0$ come soluzione. Inoltre $u_0 \equiv 0$ soddisfa

anche le condizioni al bordo $u_0(0) = u_0(1) = 0$ e quindi $u_0 \in X$.

Comunque, poiché $\inf_{u \in X} F(u) = 0$, $u_0 \equiv 0$ non è un minimo poiché

$$F(0) = 1.$$

□

b) Problemi con minimi "con pt. angolosi" non sono affatto di natura artificiale ma appaiono in modo naturale in natura (vedi Oss. pag. 39 in [GH]) ■

Abbiamo così visto un pblm. variazionale che non ammette minimo nonostante la funzione integranda $f(x, u, \xi) = (\xi^2 - 1)^2$ sia estremamente regolare. In realtà, la principale "colpa" di questa funzione è di non essere convessa!! Infatti vale il seguente

Teorema 2 :

i) Se $f \in C^1([a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ e se $\forall x \in [a, b]$

$$(u, \xi) \mapsto f(x, u, \xi) \text{ è } \underline{\text{convessa}},$$

se $u_0 \in X$ è soluzione di (EED), allora u_0 è un pt. di minimo di (P).

ii) Se $f \in C^2([a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ e se $\forall x \in [a, b]$

$$(u, \xi) \mapsto f(x, u, \xi) \text{ è } \underline{\text{convessa}},$$

se $u_0 \in X \cap C^2([a, b])$ è soluzione di (EE), allora u_0 è un pt. di minimo di (P).

Infine, se f è strettamente convessa*, allora il minimo di (P) se esiste, è unico.

* NOTA: Per avere la stretta convessità del funzionale, l'ipotesi $f(x, \cdot, \cdot)$ strettamente convessa può essere indebolita grazie alla particolare forma del funzionale variazionale prima: basta che nella condizione di convessità $f(x, v, \eta) \geq f(x, u, \xi) + f_u(x, u, \xi)(v - u) + f_\xi(x, u, \xi)(\eta - \xi)$ l'uguale vale se e solo se $v = u$ oppure $\eta = \xi$... Per esempio, la somma di una funzione strett. convessa in ξ e di una convessa ma non strett. convessa in u produce un funzionale integrale strettamente convesso!

Dim. i) Sia $u_0 \in X$ una soluzione di (EED). Poiché

$$(u, \xi) \mapsto f(x, u, \xi)$$

è convessa $\forall x \in [a, b]$, dal teorema 2 (vedi pag. 31) abbiamo

$$f(x, u(x), u'(x)) \geq f(x, u_0(x), u_0'(x)) + f_u(x, u_0(x), u_0'(x))(u(x) - u_0(x)) + f_\xi(x, u_0(x), u_0'(x))(u'(x) - u_0'(x))$$

$\forall u \in X$. Integrando questa disuguaglianza su $[a, b]$, otteniamo

$$(*) \quad F(u) \geq F(u_0) + \int_a^b [f_u(x, u_0, u_0')(u - u_0) + f_\xi(x, u_0, u_0')(u' - u_0')] dx.$$

Ponendo $v = u - u_0$ (nota: $v(a) = v(b) = 0$, $v \in \mathcal{C}^1([a, b])$)
si ha allora, usando (EED) che

$$F(u) \geq F(u_0) \quad \forall u \in X. \quad \square$$

ii) Procediamo come in i) e riscriviamo (*)

$$F(u) \geq F(u_0) + \int_a^b [f_u(x, u_0, u_0')(u - u_0) + f_\xi(x, u_0, u_0')(u' - u_0')] dx.$$

Integrando per parti il secondo termine dell'integrando, notando sempre che $u(a) - u_0(a) = 0$, $u(b) - u_0(b) = 0$, si ha

$$F(u) \geq F(u_0) + \int_a^b \left[f_u(x, u_0, u_0') - \frac{d}{dx} f_\xi(x, u_0, u_0') \right] (u - u_0) dx.$$

Usando (EE) si ha che

$$F(u) \geq F(u_0) \quad \forall u \in X$$

che è quanto si voleva. □

Proviamo infine l'unicità di un eventuale minimo di (P) nell'ipotesi di stretta convessità per $(u, \xi) \mapsto f(x, u, \xi)$.

Supponiamo che esistano due soluzioni $u_0, \bar{u} \in X$ del probl. (P) (non c'è bisogno di distinguere tra i casi i) e ii); la dim. è la medesima). Vogliamo dim. che $u_0 = \bar{u}$. Poniamo

$$w = \frac{1}{2} u_0 + \frac{1}{2} \bar{u}.$$

Osserviamo che $w \in X$. Applicando la convettà di $(u, \xi) \mapsto f(x, u, \xi)$ otteniamo

$$f(x, w, w') = f\left(x, \frac{1}{2} u_0 + \frac{1}{2} \bar{u}, \frac{1}{2} u_0' + \frac{1}{2} \bar{u}'\right) \leq \frac{1}{2} f(x, u_0, u_0') + \frac{1}{2} f(x, \bar{u}, \bar{u}')$$

e quindi, integrando su $[a, b]$

$$F(w) \leq \frac{1}{2} F(u_0) + \frac{1}{2} F(\bar{u})$$

e quindi

$$\begin{aligned} \inf_{u \in X} F(u) &\leq F(w) \leq \frac{1}{2} F(u_0) + \frac{1}{2} F(\bar{u}) = \\ &= \inf_{u \in X} F(u) \end{aligned}$$

Risulta allora che

$$F(w) = \frac{1}{2} F(u_0) + \frac{1}{2} F(\bar{u})$$

Abbiamo dunque

$$\int_a^b \left[\frac{1}{2} f(x, u_0, u_0') + \frac{1}{2} f(x, \bar{u}, \bar{u}') - f\left(x, \frac{1}{2} u_0 + \frac{1}{2} \bar{u}, \frac{1}{2} u_0' + \frac{1}{2} \bar{u}'\right) \right] dx = 0$$

Poiché la funzione integranda è per la stretta convettà di f positiva o almeno zero, si deduce che $u_0 \equiv \bar{u}$ su $[a, b]$ come desiderato. $\square$

In seguito consideriamo vari casi particolari ed esempi.

Prima di fare ciò, diamo un'espressione differente dall'equazione di Eulero-Lagrange (EE). Essa risulterà particolarmente utile nel caso che f non dipenda esplicitamente da x (vedi oss. pag. 41) come vedremo in alcuni esempi che seguono.

Prop.: Sia $f \in \mathcal{C}^2([a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ e sia $u_0 \in \mathcal{C}^2([a,b])$ un estremo di F , ossia una soluzione di (EE). Allora $\forall x \in [a,b]$ vale

$$(EE)' \quad \frac{d}{dx} [f(x, u_0(x), u_0'(x)) - u_0'(x) f_g(x, u_0(x), u_0'(x))] = f_x(x, u_0(x), u_0'(x))$$

Dim. Notiamo che $\forall u_0 \in \mathcal{C}^2([a,b])$ abbiamo, eseguendo semplicemente la derivazione,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} [f(x, u_0, u_0') - u_0' f_g(x, u_0, u_0')] &= \\ &= f_x(x, u_0, u_0') + f_u(x, u_0, u_0') u_0' + \cancel{f_g(x, u_0, u_0') u_0''} - \cancel{u_0'' f_g(x, u_0, u_0')} - \\ &\quad - u_0' \frac{d}{dx} [f_g(x, u_0, u_0')] \\ &= f_x(x, u_0, u_0') + u_0' \left[\underbrace{f_u(x, u_0, u_0') - \frac{d}{dx} [f_g(x, u_0, u_0')]} \right]. \end{aligned}$$

Se u_0 è estremo di F , allora $= 0$, e quindi si ottiene $(EE)'$ $\square$

Dal teorema 1, pag. 34 e dalla Prop. precedente segue quindi immed.

Teorema 3. Se $f \in \mathcal{C}^2([a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ e se (P) ammette una funzione minimizzante $u_0 \in X \cap \mathcal{C}^2([a,b])$, allora $\forall x \in [a,b]$ vale $(EE)'$.

Oss. Se f non dipende esplicitamente da x , allora la funzione

$$\Phi(u, \xi) \doteq f(u, \xi) - \xi f_{\xi}(u, \xi)$$

è un integrale primo del funzionale F , cioè è costante lungo ogni estemale di F . $\circledast$ □

Osservazione banale! Possiamo indebitare, nella definizione di estemale di F la richiesta $\mathcal{C}^2([a, b])$ assumendo solo $\mathcal{C}^2(J_{a, b}[)$ e l'eq. (EE) (e anche (EE)') vale $\forall x \in J_{a, b}[$. □

Come già detto precedentemente, vogliamo indagare (EE) e gli estremali di F (ed eventualmente la loro natura) in vari casi particolari ed esempi.

CASO ① : $f(x, u, \xi) = f(\xi)$

Questo è il caso più semplice. L'eq. di Eulero-Lagrange (EE) è

$$\boxed{\frac{d}{dx} [f'(u')] = 0 \quad \text{su } [a, b],}$$

i.e. $f'(u') = \text{cost.}$

Notiamo che $u(x) = c_1 x + c_2$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ è un estemale di F .

Imponendo $u(a) = \alpha$, $u(b) = \beta$ otteniamo, in particolare,

$$\boxed{u_0(x) = \frac{\beta - \alpha}{b - a} (x - a) + \alpha} \in X$$

ed u_0 è un pt. stazionario di F .

$\circledast$ cioè $\Phi(u(x), u'(x)) = f(u(x), u'(x)) - u'(x) f_{\xi}(u(x), u'(x)) = \text{costante su } [a, b]$
per ogni estemale di F .