

NOTA: È chiaro che lo studio della variazione seconda (Prop. ii) pag. 103) non è molto comodo poiché la disuguaglianza si presenta in forma integrale. Vediamo di ottenere delle condizioni puntuali ulteriori che possono essere verificate più facilmente.

Osserviamo innanzitutto che dalla condizione necessaria $\delta^2 F(u_0, v) \geq 0$ $\forall v, \dots$ in un punto di minimo relativo debole segue la seg. condizione necessaria (che può essere verificata molto facilmente!)

minimi relativi deboli!

Proposizione (Condizione necessaria di Legendre): Sia $f \in C^2([a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$. Se u_0 è un punto di minimo relativo debole di F in $X = \{u \in C^1([a, b]) : u(a) = \alpha, u(b) = \beta\}$. Allora

$$f_{\xi\xi}(x, u_0(x), u_0'(x)) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b].$$

NOTA: Prima della dim. vediamo qualche utile notazione - definizione legata alla variazione seconda di F in u_0 nella direzione di v : abbiamo

$$\delta^2 F(u_0, v) = \int_a^b \left[f_{uu}(x, u_0, u_0') v^2 + 2 f_{u\xi}(x, u_0, u_0') v v' + f_{\xi\xi}(x, u_0, u_0') v'^2 \right] dx.$$

Se definiamo

$$q(x, v, \eta) \doteq \frac{1}{2} \left[f_{uu}(x, u_0, u_0') v^2 + 2 f_{u\xi}(x, u_0, u_0') v \eta + f_{\xi\xi}(x, u_0, u_0') \eta^2 \right],$$

allora $q(x, v, \eta)$ è definita per $(x, v, \eta) \in [a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e prende il nome di Lagrangiana accessoria corrispondente ad f e u_0 , e l'integrale variazionale associato

$$Q(v) \doteq \int_a^b q(x, v(x), v'(x)) dx$$

→ forma quadratica in v e v'

è chiamato l'integrale accessorio rispetto ad f e u_0 . Abbiamo

$$Q(v) = \frac{1}{2} \delta^2 F(u_0, v)$$

$\forall v \in \mathcal{C}^1([a, b])$.

Considerando allora delle funzioni limitate v le cui derivate possono essere grandi, vediamo che il termine $f_{\xi\xi}$ in $q(x, v, v')$ cioè

$$\frac{1}{2} f_{\xi\xi}(x, u_0, u_0') v'^2$$

è il termine dominante. Questa è esattamente la ragione per cui $\delta^2 F(u_0, v) \geq 0 \quad \forall v \dots$ implica la condizione puntuale della prop. sopra.

Dim. Prop. Dalla Prop. i) pag. 103 otteniamo che $\delta F(u_0, v) = 0$

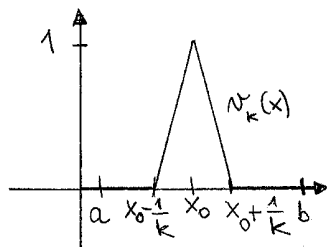
e

$$\delta^2 F(u_0, v) \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{C}^1([a, b]) \quad v(a) = v(b) = 0$$

ossia, usando la notazione introdotta sopra, che

$$Q(v) = \int_a^b q(x, v(x), v'(x)) dx \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{C}^1([a, b]) \quad v(a) = v(b) = 0.$$

Consideriamo $x_0 \in]a, b[$, e per k suff. grande



$$v_k(x) = \begin{cases} k(x - x_0) + 1 & \text{se } x \in [x_0 - \frac{1}{k}, x_0] \\ -k(x - x_0) + 1 & \text{se } x \in [x_0, x_0 + \frac{1}{k}] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Allora l'integrale sopra diventa

$$Q(v_k) = \frac{1}{2} \int_{x_0 - \frac{1}{k}}^{x_0 + \frac{1}{k}} \underbrace{f_{uu}(x, u_0, u_0')}_{\text{limitata}} v_k^2(x) dx + \int_{x_0 - \frac{1}{k}}^{x_0} \underbrace{f_{u\xi}(x, u_0, u_0')}_{\text{limitata}} v_k(x) k dx - \int_{x_0}^{x_0 + \frac{1}{k}} \underbrace{f_{u\xi}(x, u_0, u_0')}_{\text{limitata}} v_k(x) k dx + \frac{1}{2} \int_{x_0 - \frac{1}{k}}^{x_0 + \frac{1}{k}} f_{\xi\xi}(x, u_0, u_0') k^2 dx \geq 0.$$

Dividendo per k , si ha

$$0 \leq \frac{1}{2k} \int_{x_0 - \frac{1}{k}}^{x_0 + \frac{1}{k}} f_{\xi\xi}(x, u_0, u_0') k^2 dx + o(1) \quad \text{per } k \rightarrow +\infty.$$

Dal teorema della media e dalla continuità di $f_{\xi\xi}$ in $[a, b]$ segue la tesi.

(per essere precisi si dovrebbero arrotondare i punti angolari di v_k , ma questo è solo un tecnicismo!! e quindi lo omettiamo). $\square$

Es. Sia data la funzione lagrangiana $f(\xi) = 3\xi^4 - 20\xi^3 + 36\xi^2$.

Discutere se

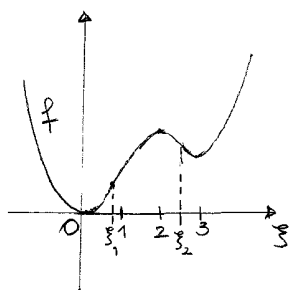
$$F(u) = \int_0^1 f(u') dx$$

ammette un punto di minimo relativo debde in $X = \{u \in C^1([0,1]) : u(0)=0, u(1)=1\}$

Svolgimento: $f(\xi) = \xi^2(3\xi^2 - 20\xi + 36)$; allora $f(\xi) = 0 \Leftrightarrow \xi = 0$
altrimenti $f(\xi) > 0$

$$f_\xi(\xi) = 12\xi^3 - 60\xi^2 + 72\xi = 12\xi(\xi^2 - 5\xi + 6)$$

$$f_{\xi\xi}(\xi) = 36\xi^2 - 120\xi + 72. \quad (*)$$



L'eq. di Eulero-Lagrange ci dà $f_\xi(u'(x)) = \text{cost}$

e quindi $u'(x) = \text{cost}$; ne segue $u(x) = ax + b$.

Dalle condizioni al contorno segue $u_0 \in X \Leftrightarrow$

$$u_0'(x) = 1 \quad \forall x \in [0,1].$$

Poiché

$$f_{\xi\xi}(u_0'(x)) = 36 - 120 + 72 < 0 \quad \forall x \in [0,1]$$

possiamo concludere che F non ha un punto di minimo relativo debde in X , poiché non soddisfa la cond. nec. di Legendre. $\square$

Vogliamo ora ottenere una condizione necessaria più forte della condizione di Legendre supponendo che u_0 sia un punto di minimo relativo forte.

Sia $f \in C^1([a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ la funzione lagrangiana. Definiamo la funzione di eccesso di Weierstrass di f il seguente termine

$$E(x, u, \xi, \eta) = f(x, u, \eta) - f(x, u, \xi) - f_\xi(x, u, \xi)(\eta - \xi)$$

$(*) f_{\xi\xi} = 0 \Leftrightarrow \xi_1 = 0,8 \text{ o } \xi_2 = 2,5$. Si ha che f è convessa all'esterno di $[\xi_1, \xi_2]$ e concava all'interno. $\square$

OSS. • $\mathcal{E} \in \mathcal{C}([a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$; inoltre

• $\mathcal{E}(x, u, \xi, \eta) \geq 0 \quad \forall \xi, \eta \in \mathbb{R} \Rightarrow$ la funzione $\xi \mapsto f(x, u, \xi)$ è convessa

minimi locali forti!!

Proposizione (Condizione necessaria di Weierstrass): sia $f \in \mathcal{C}^1([a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$.

Se u_0 è un punto di minimo relativo forte di F su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([a,b]) : u(a) = \alpha, u(b) = \beta\}$

Allora

$$\mathcal{E}(x, u_0(x), u_0'(x), \eta) \geq 0 \quad (*) \quad \forall x \in [a,b] \quad \forall \eta \in \mathbb{R}.$$

Dim. vedi [GH] Chapt. 4 §1.4.

Vediamo un'applicazione di tale risultato.

Es. 1 Proviamo che $u_0 \equiv 0$ non è un minimizzante locale forte del funzionale

$$F(u) = \int_0^1 [u'^2 + u^3] dx$$

su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = u(1) = 0\}$ (vedi Es. 2 pag. 101)

provando che non è soddisfatta la cond. nec. di Weierstrass.

In fatti, $f(x, u, \xi) = f(\xi) = \xi^2 + \xi^3$

$$f_\xi(\xi) = 2\xi + 3\xi^2$$

e quindi

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(x, u, \xi, \eta) &= (\eta^2 + \eta^3) - (\xi^2 + \xi^3) - (2\xi + 3\xi^2)(\eta - \xi) \\ &= \eta^2 + \eta^3 - \xi^2 - \xi^3 - 2\xi\eta + 2\xi^2 - 3\xi^2\eta + 3\xi^3 \\ &= (\eta^2 - 2\xi\eta + \xi^2) + \eta^3 - 3\xi^2\eta + 2\xi^3 \\ &= (\eta - \xi)^2 (1 + \eta + 2\xi). \end{aligned}$$

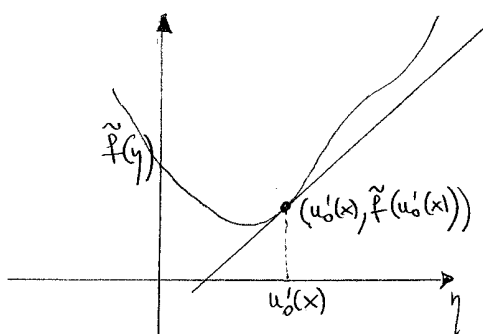
Ne segue

$$\mathcal{E}(x, 0, 0, \eta) = \eta^2 (1 + \eta)$$

e quest'espressione è < 0 se $\eta < -1$. □

OSS.1. Il significato della disuguaglianza $\mathcal{E}(x, u_0(x), u'_0(x), \eta) \geq 0$

$\forall \eta$ si capisce meglio con la seguente figura:



fissato x , studiamo la funzione $\tilde{f}$ della sola variabile $\eta \in \mathbb{R}$ definita da

$\tilde{f}(\eta) \equiv f(x, u_0(x), \eta)$ e sia, per x fissato,

$$T(\eta) = f(x, u_0(x), u'_0(x)) + f_\eta(x, u_0(x), u'_0(x))(\eta - u'_0(x))$$

la funzione lineare in η , il cui grafico

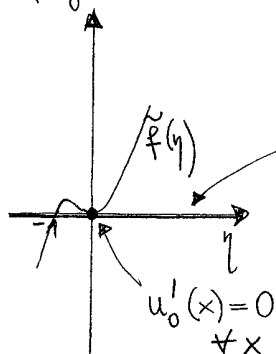
è tangente al grafico di $\tilde{f}$ nel pt. $\eta = u'_0(x)$.

Allora con tale notazione, $\mathcal{E}(x, u_0(x), u'_0(x), \eta) = \tilde{f}(\eta) - T(\eta)$ e la

condizione necessaria di Weierstrass è soddisfatta se $\forall \eta \in \mathbb{R}$ si ha $\tilde{f}(\eta) \geq T(\eta)$.

Come abbiamo già osservato, se si ha $\mathcal{E}(x, u_0(x), \xi, \eta) \geq 0$ $\forall \xi, \eta$, allora si ha che il grafico di $\tilde{f}$ sta al di sopra delle sue tangenti al grafico in ogni pt; allora $\tilde{f}$ è convessa.

OSS.2. Prendiamo allora di nuovo in considerazione l'esempio 1 a pag. 111. Usando la notazione dell'OSS.1, abbiamo



$$\tilde{f}(\eta) = f(\eta) = \eta^2 + \eta^3$$

$$u_0(x) \equiv 0$$

$$T(\eta) = f(0) + f_\eta(0)(\eta - 0) = 0$$

E si ha subito che

$$\mathcal{E}(x, u_0(x), u'_0(x), \eta) = \tilde{f}(\eta) - T(\eta) \geq 0$$

$\Leftrightarrow \eta \geq -1$ e quindi non è soddisfatta

la condizione nec. di Weierstrass. □

OSS.3 Cond. nec. di Weierstrass $\Rightarrow$ cond. nec. di Legendre, ossia
 $\mathcal{E}(x, u_0(x), u_0'(x), \eta) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b], \forall \eta \in \mathbb{R} \Rightarrow f_{\xi\xi}(x, u_0(x), u_0'(x)) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b].$

Infatti, dalla definizione di $\mathcal{E}$ (pag. 110) abbiamo $\mathcal{E}(x, u, \xi, \xi) = 0$
 $\forall (x, u, \xi) \in [a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Allora abbiamo, per ipotesi, $\forall x \in [a, b]$ fissato
 $\mathcal{E}(x, u_0(x), u_0'(x), u_0'(x)) = 0$ e $\mathcal{E}(x, u_0(x), u_0'(x), \eta) \geq 0 \quad \forall \eta$
 quindi $\eta = u_0'(x)$ è un pt. di minimo assoluto per $\mathcal{E}(x, u_0(x), u_0'(x), \cdot)$.

Poiché

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \eta}(x, u, \xi, \eta) = f_{\xi}(x, u, \eta) - f_{\xi}(x, u, \xi)$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial \eta^2}(x, u, \xi, \eta) = f_{\xi\xi}(x, u, \eta),$$

lo sviluppo di Taylor di $\mathcal{E}$ in $\eta = u_0'(x)$ ci dà

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(x, u_0(x), u_0'(x), \eta) &= \mathcal{E}(x, u_0(x), u_0'(x), u_0'(x)) + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \eta}(x, u_0(x), u_0'(x), u_0'(x))(\eta - u_0'(x)) \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial \eta^2}(x, u_0(x), u_0'(x), \tilde{\eta})(\eta - u_0'(x))^2 \end{aligned}$$

con $\tilde{\eta}$ un valore tra η e $u_0'(x)$. Poiché $f_{\xi\xi}$ è continua e η può essere preso arbitrariamente vicino a $u_0'(x)$, da $\mathcal{E}(x, u_0(x), u_0'(x), \eta) \geq 0$ segue
 $f_{\xi\xi}(x, u_0(x), u_0'(x)) \geq 0$. □

Vogliamo ora fare ancora una discussione breve sulla variazione seconda ottenendo altre condizioni di semplice utilizzo (ma necessarie che sufficienti) per un minimo relativo debole: esse si ottengono studiando l'equazione (accorciata) di Jacobi. Come vedremo in seguito, dato un estemale u_0 di F , questa è l'equazione di Eulero dell'integrale accorciato rispetto ad f in u_0 $Q(w) = \frac{1}{2} \delta^2 F(u_0, w)$.

Minimizzanti deboli e la teoria di Jacobi

(la teoria dei punti coniugati: lavoro di Legendre e Jacobi)

Supponiamo $f(x, u, \xi)$ la lagrangiana di classe $\mathcal{C}^3([a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ e $u_0 \in \mathcal{C}^3([a, b])^{(*)}$ un estremoale di

$$F(u) = \int_a^b f(x, u(x), u'(x)) dx.$$

Ricordiamo l'integrale accessorio $Q(v)$ rispetto ad f e u_0 dato da

$$Q(v) = \int_a^b [a(x)v'^2 + 2b(x)vv' + c(x)v^2] dx,$$

dove

$$a(x) = \frac{1}{2} f_{\xi\xi}(x, u_0(x), u_0'(x))$$

$$b(x) = \frac{1}{2} f_{u\xi}(x, u_0(x), u_0'(x))$$

$$c(x) = \frac{1}{2} f_{uu}(x, u_0(x), u_0'(x)).$$

La sua equazione di Eulero si chiama equazione (accessoria) di Jacobi:

$$1) \quad -(a(x)v')' + (c(x) - b'(x))v = 0 \quad \text{su }]a, b[;$$

le soluzioni v di classe $\mathcal{C}^2$ sono chiamati campi di Jacobi (lungo u_0).

L'idea di Legendre per trattare l'integrale accessorio rispetto ad f e u_0 consiste nell'aggiungere un "null-lagrangiana" G (ovvia ogni funzione $v \in \mathcal{C}^2([a, b])$ è soluzione dell'eq. di Eulero associata a G):

$$G(x, v, \eta) = 2v\eta w(x) + v^2 w'(x) \quad (w \in \mathcal{C}^1)$$

all'integranda

$$q(x, v, \eta) = a(x)\eta^2 + 2b(x)v\eta + c(x)v^2$$

dell'integrale accessorio $Q(v)$ tale che la lagrangiana modificata

(*) quando si studia l'eq. di Jacobi sarà opportuno estendere l'estremoale a $\mathcal{C}^3([a-\delta_0, b+\delta_0])$ $\delta_0 > 0$. Questa non sarà una restrizione se $f_{\xi\xi}(x, u_0(x), u_0'(x)) \neq 0$ per $x=a$ e $x=b$, poiché dal teorema di Jensen per il princ. di Goursat per eq. diff. ordinarie si avrà l'estensione dell'estremoale al di fuori dell'intervallo $[a, b]$ opportunamente.