

si scrive come

$$q + G = a(x)(\dots)^2.$$

Otteniamo così delle buone informazioni sia su Q che sull'eq. di Jacobi poiché l'aggiunta di un "null-lagrangian" non cambia l'eq. di Eulero di Q e nemmeno il valore di Q tra tutte le funzioni a valori nel bordo di $[a, b]$ fissati. Abbiamo ovviamente $\forall v, w \in \mathcal{C}^1$

$$\begin{aligned} \ell(v) &= \int_a^b G(x, v, v') dx = \int_a^b (2v v' w + v^2 w') dx \\ &= \int_a^b \frac{d}{dx} [v^2 w] dx = [v^2 w]_a^b \end{aligned}$$

e mi ha $\ell(v) = 0 \quad \forall v \in \mathcal{C}^1([a, b])$ con $v(a) = v(b) = 0$. Allora mi ha $\forall v \in \mathcal{C}^1([a, b])$ con $v(a) = v(b) = 0$

$$Q(v) = \int_a^b [a(x)v'^2 + 2(b(x) + w(x))v v' + (c(x) + w'(x))v^2] dx.$$

Osserviamo ora che per $\alpha \neq 0$ si ha

$$\begin{aligned} \alpha \eta^2 + 2\beta \eta v + \gamma v^2 &= \alpha \left(\eta^2 + \frac{2\beta \eta v}{\alpha} + \frac{\gamma}{\alpha} v^2 \right) \\ &= \alpha \left(\eta + \frac{\beta}{\alpha} v \right)^2 + \gamma v^2 - \frac{\beta^2 v^2}{\alpha} \\ &= \alpha \left(\eta + \frac{\beta}{\alpha} v \right)^2 + \left(\frac{\alpha \gamma - \beta^2}{\alpha} \right) v^2. \end{aligned}$$

Quindi $\alpha \eta^2 + 2\beta \eta v + \gamma v^2 = \alpha \left(\eta + \frac{\beta}{\alpha} v \right)^2$ se $\alpha \gamma - \beta^2 = 0$. Segue allora

Lemma di Legendre: Sia $w \in \mathcal{C}^1([a, b])$ una funzione tale che

$$2) \quad (b(x) + w(x))^2 - a(x)(c(x) + w'(x)) = 0,$$

allora l'integrale accorciato può essere trasformato in

$$3) \quad Q(v) = \int_a^b a(x) \left(v'(x) + \frac{b(x) + w(x)}{a(x)} v(x) \right)^2 dx \quad \forall v \in \mathcal{C}^1([a, b]) \\ v(a) = v(b) = 0$$

se $a(x) \neq 0$ su $[a, b]$.

Studiamo ora l'equazione 2) : supponiamo $a(x) > 0$ in $[a, b]$ e supponiamo che $v_0(x)$ sia un campo di Jacobi (i.e. soluz. di 1)) e $v_0(x) > 0$ in $[a, b]$. Come osservato da Jacobi, si ha che

$$w(x) \doteq - \left(b(x) + a(x) \frac{v_0'}{v_0} \right)$$

è una soluzione di 2). Infatti, basta considerare tale w e la sua derivata e si ottiene (semplificando il più possibile) che

$$\begin{aligned} (b(x) + w(x))^2 - a(x)(c(x) + w'(x)) &= \\ - \frac{a(x)}{v_0(x)} \left[- (a(x)v_0')' + (c(x) - b'(x))v_0 \right] &= \\ = 0 &\text{ poiché } v_0 \text{ è un campo di Jacobi.} \end{aligned}$$

Inoltre si ottiene

$$\begin{aligned} v'(x) + \frac{b(x) + w(x)}{a(x)} v(x) &= v'(x) - \frac{\cancel{a(x)} v_0'}{\cancel{a(x)} v_0} v(x) \\ &= \frac{v'(x)v_0 - v_0'v(x)}{v_0} = v_0 \left(\frac{v}{v_0} \right)'. \end{aligned}$$

Allora, da quanto detto sopra e dal lemma di Legendre segue

Lemma di Jacobi : Se $a(x) = \frac{1}{2} \frac{d^2 F}{dx^2}(x, u_0(x), u_0'(x)) > 0$ in $[a, b]$ e se esiste un campo di Jacobi $v_0 \in C^2([a, b])$ strettamente positivo in $[a, b]$, allora si ha

$$Q(v) = \int_a^b a(x) v_0^2 \left[\left(\frac{v}{v_0} \right)' \right]^2 dx \quad \forall v \in C^1([a, b]) \quad v(a) = v(b) = 0.$$

Vogliamo infine usare questo lemma per provare che possiamo ottenere la coercitività di $\delta^2 F(u_0, v)$ che poi ci garantisce (vedi Prop. ii) pag. 103) che u_0 è un pt. di minimo debole stretto per F su X .

Teorema : Siano $f, u_0, a(x) = \frac{1}{2} f_{\xi\xi}(x, u_0(x), u_0'(x))$ come sopra e supponiamo che valga la condizione di Legendre stretta $a(x) > 0$ su $[a, b]$. Se esiste un campo di Jacobi $v_0 \in \mathcal{C}^2([a, b])$ con $v_0(x) > 0$ su $[a, b]$, allora u_0 è un punto di minimo relativo debole di F .

Dim. Sia $v \in \mathcal{C}^1([a, b])$ con $v(a) = v(b) = 0$ arbitraria. Basta provare che $\exists \lambda > 0$ tale che $\forall v \in \mathcal{C}^1([a, b])$ con $v(a) = v(b) = 0$

$$\delta^2 F(u_0, v) \geq \lambda \int_a^b [v^2 + v'^2] dx.$$

Ovviamente $\psi = \frac{v}{v_0} \in \mathcal{C}^1([a, b])$, $\psi(a) = \psi(b) = 0$: dal lemma di Jacobi e dalla disuguaglianza di Poincaré^(*) si ha

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} \delta^2 F(u_0, v) \right) \quad Q(v) &= \int_a^b a(x) v_0^2 (\psi')^2 dx \geq \inf_{[a, b]} [a(x) v_0^2] \int_a^b \psi'^2 dx \\ &\geq \inf_{[a, b]} [a(x) v_0^2] \frac{1}{(b-a)^2} \int_a^b \psi^2 dx \\ &\geq \inf_{[a, b]} [a(x) v_0^2] \inf_{[a, b]} \left(\frac{1}{v_0^2} \right) \cdot \frac{1}{(b-a)^2} \int_a^b v^2 dx \end{aligned}$$

Quindi esiste una costante $\mu > 0$ t.c.

$$(i) \quad Q(v) \geq \mu \int_a^b v^2 dx \quad \forall v \in \mathcal{C}^1([a, b]), v(a) = v(b) = 0.$$

Per concludere dobbiamo stimare $Q(v)$ dal basso anche con $\int_a^b v'^2 dx$. Per ottenere questo si deve sfruttare l'espressione di $Q(v)$ e la disuguaglianza^(**) $2|xy| \leq \varepsilon x^2 + \frac{1}{\varepsilon} y^2$, $\varepsilon > 0$ per un opportuno ε .

$$(*) \quad \psi \in \mathcal{C}([a, b]) \quad \psi(a) = 0 \quad \text{allora} \quad \int_a^b \psi^2 dx \leq (b-a)^2 \int_a^b \psi'^2 dx. \quad \square$$

$$(**) \quad 2|xy| = 2 \left(\sqrt{\varepsilon} x \right) \left(\frac{y}{\sqrt{\varepsilon}} \right) \leq (\sqrt{\varepsilon} x)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{\varepsilon}} \right)^2 = \varepsilon x^2 + \frac{y^2}{\varepsilon}. \quad \square$$

Abbiamo

$$Q(v) = \int_a^b [a(x)v'^2 + 2b(x)vv' + c(x)v^2] dx.$$

Ponendo $\alpha \doteq \inf_{[a,b]} a$ $\beta \doteq \sup_{[a,b]} |b(x)|$ $\gamma \doteq \sup_{[a,b]} |c(x)|$ si

ottiene

$$\alpha \int_a^b v'^2 dx \leq Q(v) + 2\beta \int_a^b |vv'| dx + \gamma \int_a^b v^2 dx$$

$$\begin{aligned} 2|(\beta v)v'| &\leq \varepsilon v'^2 + \frac{\beta^2}{\varepsilon} v^2 \\ \downarrow \\ &\leq Q(v) + \varepsilon \int_a^b v'^2 + \left(\frac{\beta^2}{\varepsilon} + \gamma\right) \int_a^b v^2 dx. \end{aligned}$$

Scegliendo $\varepsilon = \frac{\alpha}{2}$ e considerando la stima per $Q(v)$ ottenuta sopra (i) si ha

$$\begin{aligned} \textcircled{ii} \quad \frac{\alpha}{2} \int_a^b v'^2 dx &\leq Q(v) + \left(\frac{2\beta^2}{\alpha} + \gamma\right) \int_a^b v^2 dx \\ &\leq \left[1 + \frac{1}{\mu} \left(\frac{2\beta^2}{\alpha} + \gamma\right)\right] Q(v). \end{aligned}$$

Dai (i) e (ii) segue allora che $\exists \lambda > 0$ t.c.

$$\delta^2 F(u_0, v) = 2Q(v) \geq \lambda \int_a^b (v'^2 + v^2) dx$$

$\forall v \in C^1([a,b])$ con $v(a) = v(b) = 0$, che quanto si voleva. □

NOTA 1. Abbiamo visto (pag. 108) che la condizione $a(x) > 0$ su $[a,b]$ è

condizione necessaria affinché u_0 sia pt. di minimo relativo debole di F . Nel teorema precedente abbiamo individuato una condizione che insieme alla condizione $a(x) > 0$ su $[a,b]$ risulta sufficiente per avere un pt. di minimo relativo debole di F .

NOTA 2. Vediamo in seguito che l'inverso del teorema precedente risulta vero nel senso che l'esistenza di un campo di Jacobi "non nullo" (lungo u_0) è una condizione necessaria per u_0 per essere una funzione minimizzante debde. Si ha infatti la seguente

Condizione necessaria di Jacobi (o di Hilbert): Se $a(x) = \frac{1}{2} f_{\xi\xi}(x, u_0, u'_0) > 0$ su $[a, b]$ e se u è un pt. di minimo relativo debde di F , allora $\forall x_0 \in [a, b]$ la riduzione N_0 del problema di Cauchy

$$\begin{cases} -(a(x)N')' + (c(x) - b'(x))N = 0 \\ N(x_0) = 0 \quad N'(x_0) = 1 \end{cases}$$

non ha zeri diversi da x_0 in $]a, b[$ (o nel linguaggio che vedremo in seguito: non possono esistere coppie di punti coniugati in $[a, b]$ e non, al più, gli estremi dell'intervallo).

Vogliamo riportare brevemente alcune considerazioni e risultati riguardanti i campi di Jacobi e i punti coniugati. Esse daranno condizioni necessarie (sopra) e condizioni sufficienti affinché u_0 sia un pt. di minimo relativo debde (omettiamo ogni dimostrazione; vedere [GH] Vol. I, Chapr. 5 §2.2).

Consideriamo l'eq. di Jacobi

$$-(a(x)N')' + (c(x) - b'(x))N = 0.$$

Se $a(x) > 0$ su $[a, b]$, allora ridurre tale eq. ad un'eq. lineare omogenea del secondo ordine

$$N'' + pN' + qN = 0,$$

con

$$p \doteq \frac{a'(x)}{a(x)} \quad q \doteq \frac{b'(x) - c(x)}{a(x)}$$

Per semplicità, vogliamo supporre che $a(x) > 0$ su $I_0 \doteq]a-\delta_0, b+\delta_0[$ $\delta_0 > 0$. Abbiamo che $\forall x_0 \in I_0, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, il p.b.m. di Cauchy

$$\begin{cases} v'' + p v' + q v = 0 \\ v(x_0) = \alpha \\ v'(x_0) = \beta \end{cases}$$

ha una ed una sola soluzione di classe $\mathcal{C}^2$ su $[a, b]$ che indicheremo con $\omega(x; x_0, \alpha, \beta)$ e si può supporre che ω sia di classe $\mathcal{C}^2$ anche su I_0 .

Fissato il parametro $\xi \in I_0$, introduciamo la funzione di Jacobi

$$\Delta(x, \xi) \doteq \omega(x; \xi, 0, 1),$$

ossia $v(x) = \Delta(x, \xi)$ è il campo di Jacobi su I_0 univocamente determinato da $v(\xi) = 0$ e $v'(\xi) = 1$.

Def. Gli zeri (isolati) di $\Delta(x, \xi)$ si chiamano punti coniugati a ξ indipendentemente se si trovano a destra o a sinistra di ξ .

(OSS. Il fatto che gli zeri sono isolati è un risultato generale della teoria delle eq. diff. ordinarie; vedi anche [GH] Chapt. V §2.2 Prop. 1)

Ovviamente ξ è coniugato a ξ^* come ξ^* è coniugato a ξ .

Abbiamo allora il seguente

Teorema Sia f, u_0 come sopra e u_0 estremo debole di F ; supponiamo che

$$a(x) = \frac{1}{2} f_{\xi\xi}(x, u_0(x), u_0'(x)) > 0 \quad \text{su } [a, b].$$

Allora:

- (i) se non esistono pt. coniugati ad a in $[a, b]$, allora u_0 è un pt. di minimo relativo debole stretto per F .

(ii) Se esiste una coppia di punti coniugati in $[a, b]$, uno dei quali $\in]a, b[$ (cioè non cade negli estremi), allora u_0 non è un punto di minimo relativo debole.

(iii) Se a è coniugato a b , allora non si può dire nulla a priori.

Dim.: (i) Si prova che esiste $x_0 \in]a - \delta_0, a[$ t.c. la funzione di Jacobi $v(x) = \omega(x; x_0, 0, 1)$ è un campo di Jacobi strettamente positivo su $[a, b]$ e si applica il teorema provato a pag. 117.

(ii) La dim. è basata sul seguente teorema (vedi [GH] Chapt. 5, §2.2 Theorem 2): Se $a(x) > 0$ su $[a, b]$ e sia v un campo di Jacobi, $v(x) \neq 0$ che si annulla agli estremi di un sottointervallo chiuso proprio di $[a, b]$. Allora $\exists w \in C^1([a, b])$ $w(a) = w(b) = 0$ t.c. $Q(w) < 0$, e quindi u_0 non è un pt. di minimo relativo debole per F .

(iii) Si trovano esempi per entrambe le situazioni e quindi non può essere provato nulla (vedi bibliografia in [GH]). $\square$

NOTA: La condizione necessaria di Jacobi segue allora dal teorema precedente o dal teorema nella dim. del pt. (ii) sopra. $\square$

Es. Sia $F(u) = \int_0^b [u'^2 - u^2] dx$; vogliamo studiare, al variare di $b > 0$, il probl. variazionale

$$\inf_{u \in X} F(u) \quad X = \{u \in C^1([0, b]) : u(0) = u(b) = 0\}.$$

$[a, b] \equiv [0, b]$

(a) Provate che $u_0(x) \equiv 0$ in $[0, b]$

(i) $\bar{u}$ è un estremo di F in X ;

(ii) soddisfa la cond. nec. di Weierstrass per minimizz. relativi forti;

(iii) soddisfa la cond. nec. di Legendre per minimizz. relativi deboli;

(iv) soddisfa la cond. di Legendre stretta;

(b) Discutete, usando la teoria dei punti coniugati di Jacobi, se $u_0 \equiv 0$ in $[0, b]$ è un punto di minimo relativo debole di F .

Svolgimento:

(a) (i) Abbiamo $f(x, u, \xi) = f(u, \xi) = \xi^2 - u^2$

$$f_\xi(u, \xi) = 2\xi \quad f_u = -2u$$

L'eq. di Eulero-Lagrange è data da

$$u'' + u = 0 \quad \text{in } [0, b]$$

e $u_0(x) \equiv 0$ è un estremo di F in X .

(ii) $\mathcal{E}(x, u, \xi, \eta) \equiv f(x, u, \eta) - f(x, u, \xi) - f_\xi(x, u, \xi)(\eta - \xi)$ e quindi

$$\mathcal{E}(x, u_0(x), u_0'(x), \eta) = \mathcal{E}(x, 0, 0, \eta) = \eta^2 \geq 0 \quad \forall x \in [0, b] \quad \forall \eta \in \mathbb{R}.$$

(iii) Perché $f_{\xi\xi}(x, u, \xi) = 2$, ovviamente

$$f_{\xi\xi}(x, u_0(x), u_0'(x)) = 2 > 0 \quad \forall x \in [0, b]$$

provando (iii), ma anche (iv).

- (b) Essendo f quadratica in u e ξ , mi ha che la lagrangiana accessoria è

$$q(x, v, \eta) = \eta^2 - v^2$$

e l'integrale accessorio è

$$Q(v) = \int_0^1 [v'^2 - v^2] dx \quad (= F(v))$$

L'eq. di Jacobi è dunque ancora

$$v'' + v = 0 \quad \text{in } [0, b],$$

e la funzione di Jacobi $\Delta(x, 0)$ è

$$v(x) = \sin x$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ricordate} \\ \Delta(x, 0) \text{ è la soluzione} \\ \text{del pbm. di Cauchy} \\ \left\{ \begin{array}{l} v'' + v = 0 \quad \text{in } [0, b] \\ v(0) = 0 \\ v'(0) = 1 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Osserviamo allora che il primo punto coniugato ad $a=0$ è $\xi = \pi$.

Allora, l'estremale $u_0(x) \equiv 0$ in $[0, b]$ non ha punto coniugato ad $a=0$ in $[0, b]$ se $b < \xi$, mentre per $b \geq \pi$ esiste un punto coniugato ξ .

Dal teorema a pag. 120 segue allora che

- $u_0(x) \equiv 0$ è un pt. di minimo relativo debole stretto di F in

$$[0, b] \quad \text{se } b < \pi;$$

- $u_0(x) \equiv 0$ non è un pt. di minimo relativo debole di F in

$$[0, b] \quad \text{se } b > \pi \quad (\text{infatti } a=0 \text{ e } \xi=\pi$$

sono una coppia di punti coniugati in

$$[0, b] \text{ e } \xi \in]0, b[).$$

• Infine, il caso $u_0(x) \equiv 0$ in $[0, \pi]$ non lo possiamo dedurre dal teorema di cui sopra. Ma questo caso l'abbiamo già trattato a pag. 52 provando che $u_0(x) \equiv 0$ (così come $u_0(x) = c \sin x, c \in \mathbb{R}$)

è un punto di minimo assoluto di F .

NOTA: Si verifica facilmente, anche senza l'uso della teoria dei pt. coniugati di Jacobi, che $u_0 \equiv 0$ su $[0, b]$, $b > \pi$ non è un pt. di minimo relativo debole di F su X .

In fatti, sia $u_k(x) = \frac{1}{k} \sin \frac{\pi x}{b} \in \mathcal{C}^1([0, b])$, $k \geq 1$.

Inoltre $(u_k)_k \subset X$, $u_k \rightarrow 0$ in $\mathcal{C}^1([0, b])$ e

$$\begin{aligned} F(u_k) &= \int_0^b [u_k'^2 - u_k^2] dx = \\ &= \frac{1}{k^2} \left[\frac{\pi^2}{b^2} \int_0^b \cos^2\left(\frac{\pi x}{b}\right) dx - \int_0^b \sin^2\left(\frac{\pi x}{b}\right) dx \right] \\ &= \frac{1}{k^2} \left[\frac{\pi^2}{2b} - \frac{b}{2} \right] = \frac{1}{2bk^2} [\pi^2 - b^2] < 0 = F(0). \end{aligned}$$

□

Minimizzanti forti e teoria dei campi di Weierstrass

Sia $f \in \mathcal{C}^2([a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ e sia

$$F(u) = \int_a^b f(x, u(x), u'(x)) dx$$

con $u \in \mathcal{C}^1([a, b])$.

Def. Una funzione $h: [a, b] \times [\alpha_1, \alpha_2] \rightarrow G$ (G = immagine di h ; insieme semplicemente connesso $\subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$) data da

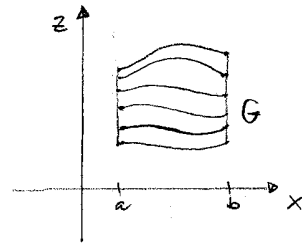
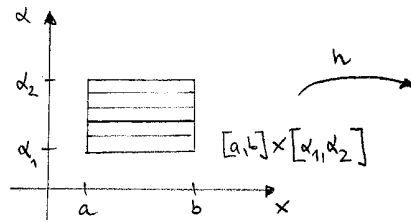
$$h(x, \alpha) \equiv (x, u(x, \alpha))$$

è detta un campo di estremali (rispetto alla lagrangiana f) se

- i) $u(\cdot, \alpha)$ è un estremoale per f per ogni fissato α ;
- ii) h è un $\mathcal{C}^1$ -diffeomorfismo tra il rettangolo $[a, b] \times [\alpha_1, \alpha_2]$ e la sua immagine G .

$[\alpha_1, \alpha_2]$ = l'intervallo di parametri

Oss.



In queste condizioni, per ogni punto $(x, z) \in G$ passa uno ed un solo estremale, cioè $\exists! \alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$ t.c. $u(x, \alpha) = z$
 $\hookrightarrow$ possiamo denotarlo con $\alpha(x, z)$

($u(x, \alpha)$ ^{notazione} $u_\alpha(x)$)

Possiamo allora dare la

Def. La pendenza (o funzione pendenza) $P(x, z)$ del campo di estremali

$h: [a, b] \times [\alpha_1, \alpha_2] \rightarrow G$ con $h(x, \alpha) = (x, u(x, \alpha))$ è l'unica funzione $\mathcal{C}^1$

$P: G \rightarrow \mathbb{R}$ t.c. $P(x, u(x, \alpha)) = u'(x, \alpha)$ ($u'(x, \alpha) = u_x(x, \alpha)$)

NOTA: si ha $\forall (x, z) \in G$ $P(x, z) \equiv u'(x, \alpha(x, z))$, cioè la pendenza della curva $u(\cdot, \alpha)$ in $(x, u(x, \alpha))$ con $\alpha = \alpha(x, z)$.

Si ha allora che $w(x) \equiv u(x, \alpha)$ è l'unica soluzione dell'eq. diff. $\begin{cases} w' = P(x, w) \\ w(x) = z \end{cases}$
 $\square$

Esempi: campi estremali - pendenze

① Sia $f(x, u, \xi) = f(\xi)$.

Allora l'eq. di Eulero-Lagrange per f è $\frac{d}{dx} [f_\xi(u')] = 0$, ossia

$f_\xi(u'(x)) = \text{cost.} \quad \forall x \in [a, b]$. Allora $u'(x) = p$, per p fissato, soddisfa

l'eq. di Eulero-Lagrange. Abbiamo dunque che $u_\alpha(x) \equiv u(x, \alpha) = px + \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, è una famiglia di estremali di f .

sia ora $(x_0, z_0) \in G = [a, b] \times \mathbb{R}$. Allora $z_0 = u_{\alpha_0}(x_0) = px_0 + \alpha_0 \iff \alpha_0 = z_0 - px_0$

e quindi $u_{\alpha_0}(x) = px + (z_0 - px_0)$ è l'unica estemale passante per (x_0, z_0) .

Poiché $P(x_0, z_0) = u'_{\alpha_0}(x)|_{x=x_0} = p$ si ha $P(x_0, z_0) = p$. Dall'arbitrarietà di (x_0, z_0)

si ottiene $P(x, z) \equiv p$ su $G = [a, b] \times \mathbb{R}$. $\square$

② Sia $f(x, u, \xi) = f(u, \xi) = \xi^2 - u^2$.