

su $[a, b]$ (cioè la stazionarietà di F è caratterizzata da $\Phi(u, u') = c$ su $[a, b]$). $\square$

Vediamo di sfruttare nei prossimi esempi quest'osservazione.

Oss. usiamo
l'integrale
primo!

Es. 4 (Brachistocrona): Torniamo al funzionale della brachistocrona, cioè allo studio di

$$\inf \left\{ T(u) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^b \sqrt{\frac{1+(u'(x))^2}{u(x)}} dx : u \in X \right\}$$

dove $X = \{u \in C^1([0, b]) : u(0) = 0, u(b) = \beta, u(x) > 0 \text{ su }]0, b]\}$
 $\beta > 0$ assegnato (vedi pag. 15).

Scriviamo la funzione lagrangiana $f(x, u, \xi) = f(u, \xi) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \sqrt{\frac{1+\xi^2}{u}}$

- Purtroppo la funzione $(u, \xi) \mapsto f(u, \xi)$ non è convessa (per esempio, si vede subito che non lo è la restrizione di f alla retta $u = \xi$).

NOTA: risolvendo l'eq. dell'integrale primo in questo caso troveremo che l'unica soluzione è l'arco di cicloide con cuspidi in $x=0$ che unisce l'origine al punto (b, β) . Purtroppo, non avendo la convessità del funzionale non siamo legittimati a dire che questa soluzione è un minimo. Si potrebbe farlo usando la tecnica più raffinata dei campi di Weierstrass, che vedremo in seguito, oppure con un trucco astuto: se poniamo

$$u(x) = \frac{v^2(x)}{2},$$

allora $u'(x) = v(x)v'(x)$ e il funzionale dato

diventa equivalente a

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^b \sqrt{\frac{1+(u'(x))^2}{u(x)}} dx \right) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^b \sqrt{\frac{1 + \frac{(v(x))^2 (v'(x))^2}{v^2(x)}}{v^2(x)}} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{g}} \int_0^b \sqrt{\frac{1}{v^2(x)} + (v'(x))^2} dx$$

Ora la funzione integranda $(v, z) \mapsto \sqrt{\frac{1}{v^2} + z^2}$ è strettamente convessa (occorre fare il conto della matrice hessiana!). In questo modo il problema della brachistocrona si riduce a un pbm. di minimo convesso (le cicloidi che risolvono l'eq. dell'integrale primo per il funzionale originale corrispondono, attraverso il cambio di variabili scritto sopra, a soluzioni del nuovo problema di minimo convesso !!).

- Nulla cambia nelle riduzioni del pbm. di minimo se consideriamo da ora in poi la funzione lagrangiana

$$f(u, \xi) = \frac{\sqrt{1+\xi^2}}{\sqrt{u}} \quad \left(\text{trascuriamo il termine } \frac{1}{\sqrt{2g}} \right)$$

In questo caso

$$c = \Phi(u, u') = f(u, u') - u' f_{\xi}(u, u') \quad (*)$$

risultare

$$\frac{\sqrt{1+(u'(x))^2}}{\sqrt{u(x)}} - u'(x) \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)} \sqrt{1+(u'(x))^2}} = c$$

$$\text{ossia} \quad \frac{1 + \cancel{(u'(x))^2} - \cancel{(u'(x))^2}}{\sqrt{u(x)} \sqrt{1+(u'(x))^2}} = c, \quad ,$$

e quindi, elevando al quadrato,

(*) ricordiamo che (*) è equivalente ad (EE) per $u \in \mathcal{C}^2$ non costante!

$$u(1 + u'^2) = \frac{1}{c^2}.$$

Vogliamo trovare una parametrizzazione del grafico di u nella forma

$$\begin{cases} x = x(\tau) \\ y = y(\tau), \end{cases} \text{ e ovviamente } y(\tau) = u(x(\tau))$$

Possiamo scrivere $u(x(\tau)) = k(1 - \cos \tau)$, dove k denota una costante opportuna; allora

$$[u(x(\tau))]' = u'(x(\tau)) x'(\tau) = k \sin \tau,$$

$$u'(x(\tau)) = \frac{k \sin \tau}{x'(\tau)}.$$

Allora l'eq. sopra diventa

$$c^2 k(1 - \cos \tau) \left(1 + \frac{k^2 \sin^2 \tau}{(x'(\tau))^2} \right) = 1$$

e scegliendo $c^2 k = \frac{1}{2}$, si ottiene

$$\frac{(1 - \cos \tau)}{2} \left(1 + \frac{k^2 \sin^2 \tau}{(x'(\tau))^2} \right) = 1$$

$$1 + \frac{k^2 \sin^2 \tau}{(x'(\tau))^2} = \frac{2}{1 - \cos \tau}$$

$$\frac{k^2 \sin^2 \tau}{(x'(\tau))^2} = \frac{1 + \cos \tau}{1 - \cos \tau}$$

$$\frac{(x'(\tau))^2}{k^2 \sin^2 \tau} = \frac{(1 - \cos \tau)^2}{1 - \cos^2 \tau},$$

ossia

$$x'(\tau) = k(1 - \cos \tau). \quad (*)$$

Quindi la soluzione risulta essere una cicloide con cuspidi in $(0,0)$ toccata da un punto sulla circonferenza di un

$(*)$ $x(\tau) = k(\tau - \sin \tau) + c_1$; la richiesta $x(0) = 0$ impone $c_1 = 0$.

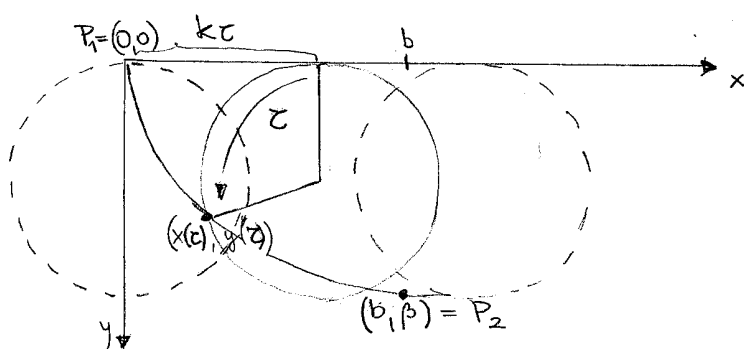
cerchio di raggio k che rotola lungo l'asse x "da sotto" (come in fig.), che in forma parametrica è

$$(*) \quad \begin{cases} x(\tau) = k(\tau - \sin \tau) \\ y(\tau) = u(x(\tau)) = k(1 - \cos \tau) \end{cases}, \quad \tau \in [0, \tau_1]$$

dove le costanti k e τ_1 sono determinate dalle condizioni

$$x(\tau_1) = b$$

$$y(\tau_1) = \beta.$$



Oss.1: La funzione $x(\tau) = k(\tau - \sin \tau)$ per $0 \leq \tau \leq 2\pi$ soddisfa

$$\dot{x}(\tau) = k(1 - \cos \tau) > 0 \text{ per } 0 < \tau < 2\pi; \text{ quindi}$$

$x(\tau)$ è strettamente crescente per $0 \leq \tau \leq 2\pi$.

Quindi esiste una funzione inversa $\tau = \tau(x)$

continua su $[0, 2\pi k]$ e regolare su $]0, 2\pi k[$.

e quindi possiamo scrivere $(*)$ in forma

non-parametrica come $y = y(\tau(x)) = u(x) = k(1 - \cos \tau(x))$.

Oss.2: Per $\tau > 0$ consideriamo il rapporto $g(\tau) = \frac{x(\tau)}{y(\tau)}$

$$= \frac{\tau - \sin \tau}{1 - \cos \tau}. \text{ Allora}$$

$$\lim_{\tau \rightarrow 0^+} g(\tau) = \lim_{\tau \rightarrow 0^+} \frac{\tau - \left(\tau - \frac{\tau^3}{3!} + o(\tau^3)\right)}{1 - \left(1 - \frac{\tau^2}{2} + o(\tau^2)\right)} = 0$$

$$\lim_{\tau \rightarrow 2\pi^-} g(\tau) = +\infty.$$

Inoltre $g'(\tau) = \frac{2(1 - \cos \tau) - \tau \sin \tau}{(1 - \cos \tau)^2}$. Notiamo che

$g'(\tau) = 1 > 0$, e per $\tau \neq \pi$ $g'(\tau)$ si può scrivere

$$g'(\tau) = \frac{\cos \frac{\tau}{2}}{\sin^3 \frac{\tau}{2}} \left(\tan \frac{\tau}{2} - \frac{\tau}{2} \right) \quad \tau \neq \pi$$

e quindi $g'(\tau) > 0$ per $0 < \tau < 2\pi$. Allora $g(\tau)$ è positiva, strettamente crescente da 0 a $+\infty$ su $[0, 2\pi[$. Dalla continuità di g segue dunque che assume ogni valore positivo esattamente una volta. In particolare, $\exists! \tau_1 \in]0, 2\pi[$ t.c.

$$\frac{x(\tau_1)}{y(\tau_1)} = \frac{b}{\beta}, \text{ e per tale } \tau_1, \text{ scegliendo } k = \frac{b}{\tau_1 - \sin \tau_1}$$

(e per tale k la costante c t.c. $kc^2 = \frac{1}{2}$) abbiamo garantito l'esistenza di una (unica) cicloide congiungente $(0,0)$ a (b,β) . $\square$

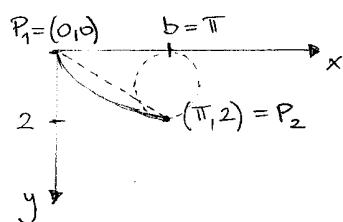
Oss. 3 Il tempo di percorrenza dell'arco di cicloide da P_1 a P_2 si calcola facilmente e si trova $\underline{T_{\min} = \tau_1 \sqrt{\frac{k}{g}}}$.

Infatti, da $u(x(\tau)) = k(1 - \cos \tau)$ e $x(\tau) = k(\tau - \sin \tau)$ ricaviamo $u'(x(\tau)) = \frac{k \sin \tau}{x'(\tau)} = \frac{k \sin \tau}{k(1 - \cos \tau)}$ e

$$\begin{aligned} T_{\min} = T(u) &= \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{\tau_1} \sqrt{\frac{1 + \frac{\sin^2 \tau}{(1 - \cos \tau)^2}}{k(1 - \cos \tau)}} \cdot k(1 - \cos \tau) d\tau = \\ &= \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{2g}} \int_0^{\tau_1} \sqrt{\frac{(1 - \cos \tau)^2 + \sin^2 \tau}{(1 - \cos \tau)^3}} (1 - \cos \tau) d\tau \\ &= \frac{\sqrt{k} \sqrt{2}}{\sqrt{2} \sqrt{g}} \int_0^{\tau_1} d\tau = \tau_1 \sqrt{\frac{k}{g}}. \end{aligned} \quad \square$$

- Un caso particolarmente semplice è quello in cui $b = \pi$ e $\beta = 2$.

In questo caso



$$\begin{cases} k(\tau_1 - \sin \tau_1) = \pi \\ k(1 - \cos \tau_1) = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \tau_1 = \pi \quad k = 1.$$

Abbiamo allora $T_{\min} = \frac{\pi}{\sqrt{g}}.$

Notiamo anche che se $u(x) = \frac{2}{\pi}x$ $0 \leq x \leq \pi$ è la retta passante per P_1 e P_2 si ha

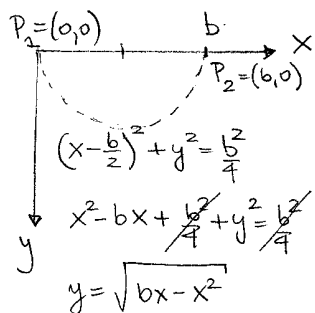
$$\begin{aligned} T_{\text{rett}} = T(u) &= \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^\pi \sqrt{\frac{1 + \frac{4}{\pi^2}}{\frac{2}{\pi}x}} dx = \frac{1}{\sqrt{2g}} \frac{\sqrt{\frac{\pi^2 + 4}{\pi^2}}}{\sqrt{\frac{2}{\pi}}} \int_0^\pi \frac{1}{\sqrt{x}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\sqrt{\pi^2 + 4}}{\sqrt{\pi}} \left[x^{\frac{1}{2}} \right]_0^\pi = \sqrt{\frac{\pi^2 + 4}{g}} \end{aligned}$$

Risulta ovviamente $T_{\text{rett}} > T_{\min}.$ □

- È anche interessante calcolare il tempo minimo che il punto materiale impiega per tornare all'altezza iniziale.

Prendendo $\beta = 0$ si trova $\tau_1 = 2\pi$ e $k = \frac{b}{2\pi}$

e abbiamo $T_{\min} = 2\pi \sqrt{\frac{b}{2\pi g}} = \sqrt{\frac{2\pi b}{g}}.$ (vedi fig. pag. 61)



Prendendo invece la semicirconferenza congiungente P_1 e P_2 ,

$$u(x) = \sqrt{bx - x^2}$$

$$u'(x) = \frac{b - 2x}{2\sqrt{bx - x^2}}$$

$$\begin{aligned} T_{\text{cerchio}} = T(u) &= \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^b \sqrt{\frac{1 + \frac{(b-2x)^2}{4(bx-x^2)}}{\sqrt{bx-x^2}}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2g}} \frac{1}{2} \int_0^b \sqrt{\frac{b^2}{(bx-x^2)^{3/2}}} dx \end{aligned}$$

$$= \frac{b}{2\sqrt{2g}} \int_0^b \frac{1}{(bx - x^2)^{3/4}} dx.$$

Poiché $\int_0^b \frac{1}{(bx - x^2)^{3/4}} dx = \int_0^b \frac{1}{\left(\frac{b^2}{4} - \left(x - \frac{b}{2}\right)^2\right)^{3/4}} dx =$

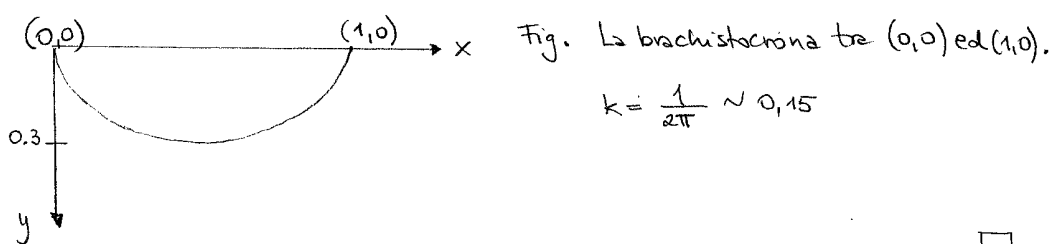
$$= \frac{4^{3/4}}{b^{3/2}} \int_0^b \frac{1}{\left(1 - \left(\frac{2}{b}x - 1\right)^2\right)^{3/4}} dx = \frac{4^{3/4}}{b^{3/2}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\frac{b}{2} \cos y}{(\cos y)^{3/2}} dy$$

$\frac{2}{b}x - 1 = \cos y$

$$= \sqrt{\frac{2}{b}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos y)^{-1/2} dy$$

si ottiene $T_{\text{cerchio}} = \sqrt{\frac{b}{g}} \underbrace{\int_0^{\pi/2} \frac{1}{(\cos y)^{1/2}} dy}_{\sim 2.62}$. Poiché

$\sqrt{2\pi} \sim 2.50$, si ottiene $T_{\text{cerchio}} > T_{\text{min}}$ (Galileo, che aveva "congetturato" il cerchio invece della cicloide, non si è sbagliato di molto !!) □



OSS.4. L'intervallo di tempo impiegato dal punto materiale per raggiungere l'estremo inferiore dell'arco si ottiene ponendo $\tau_1 = \pi$. È un fatto notevole che l'intervallo

di tempo impiegato dal punto materiale per discendere lungo la cicloide da $P_1 = (0,0)$ al punto più basso $(k\pi, 2k)$ è uguale all'intervallo di tempo che il punto materiale impiega, partendo dalla quiete, per discendere da qualsunque punto intermedio dell'arco, per esempio da $(x(\bar{t}), y(\bar{t}))$ a $(k\pi, 2k)$. In questo caso, nel funzionale $T(u)$ al denominatore mi ha $y(\bar{t}) - u(x(t))$ e il tempo impiegato è

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{\bar{t}}^{\pi} \sqrt{\frac{k^2(2-2\cos t)}{k(\cos \bar{t} - \cos t)}} dt = \sqrt{\frac{k}{g}} \int_{\bar{t}}^{\pi} \sqrt{\frac{1-\cos t}{\cos \bar{t} - \cos t}} dt.$$

$$= \pi \sqrt{\frac{k}{g}} \quad (*)$$

Poiché il risultato è indipendente da $\bar{t}$, ciò significa che il punto materiale impiega lo stesso intervallo di tempo per raggiungere il più basso pt. della cicloide, qualunque sia il pt. dell'arco da cui viene abbandonato a se stesso dalla quiete. In questo senso, la cicloide è anche tautochrone (tauto = lo stesso) $\square$

Oss. usiamo
l'integrale
primo

Es. 5 (Superficie di rivoluzione di area minima)

Come già visto (pag. 16), dobbiamo minimizzare

$$S(u) = 2\pi \int_a^b u(x) \sqrt{1 + (u'(x))^2} dx$$

tra tutte le funzioni $u \in C^1([a,b])$, con $u(a) = y_1$, $u(b) = y_2$, $u > 0$ ($y_1, y_2 > 0$ assegnati). Vogliamo individuare gli estremali di S sfruttando l'integrale primo $\bar{\Phi}$. Vedremo che per certi dati al bordo ci sarà un estremo, due estremi o nessun estremo.

(*) si ottiene facilmente usando Maple

Poniamo $f(u, \xi) = u \sqrt{1 + \xi^2}$ e abbiamo $f_{\xi}(u, \xi) = \frac{u \xi}{\sqrt{1 + \xi^2}}$.

Allora $\Phi(u, u') = c$ si scrive

$$u(x) \sqrt{1 + (u'(x))^2} - u'(x) \frac{u(x) u'(x)}{\sqrt{1 + (u'(x))^2}} = c \quad \text{su } [a, b]$$

ossia
$$\frac{u(x)}{\sqrt{1 + (u'(x))^2}} = c > 0.$$

Ne segue

$$u^2 = c^2 (1 + u'^2)$$

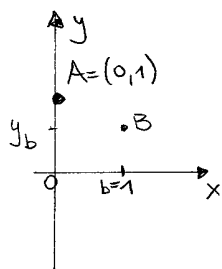
ossia

$$u'(x) = \sqrt{\frac{1}{c^2} u^2(x) - 1}.$$

Abbiamo allora un'eq. differenziale del 1° ordine che possiamo integrare mediante la separazione delle variabili. Otteniamo allora

$$u(x) = c \cosh\left(\frac{x}{c} + d\right),$$

dove $c > 0$, d sono costanti. Queste curve si chiamano catenarie*. Le superfici di rivoluzione che hanno tali curve come meridiane si chiamano catenoidi.



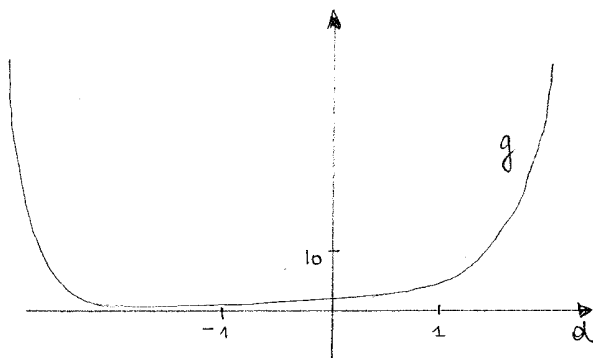
OSS. Per semplicità, fissiamo $A = (a, y_1) = (0, 1)$ e $B = (1, y_2)$ con y_2 non fissato. Vogliamo allora studiare $u(x)$ al variare di $y_2 > 0$. Avremo che $u(x)$ soddisfa le condizioni al contorno se

$$1 = u(0) = c \cosh d \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{c} = \cosh d$$

$$y_2 = u(1) = c \cosh\left(\frac{1}{c} + d\right) \quad \Rightarrow \quad y_2 = \frac{\cosh(d + \cosh d)}{\cosh d} \doteq g(d)$$

e quindi il parametro d è legato a y_2 mediante $g(d) = y_2$.

(*) Si chiamano catenarie perché risultano essere posizioni d'equilibrio di un filo sottile, flessibile ed inestensibile con densità per unità di lunghezza costante (vedi pag. 68)



Si osserva che $\lim_{d \rightarrow -\infty} g(d) = \lim_{d \rightarrow +\infty} g(d) = +\infty$,

e che esiste il minimo di g . Allora,

posto $y_{\min} = \min_{\mathbb{R}} g(d)$, si ottiene

per $y_2 < y_{\min}$ nessuna soluzione dell'eq. $y_2 = g(d)$ e quindi nessun estremoale per S passante per $A = (0, 1)$ e $B = (1, y_2)$. Se $y_2 = y_{\min}$, allora esiste un estremoale per A e B ; se $y_2 > y_{\min}$ ce ne sono almeno due estremali passanti per A e B .

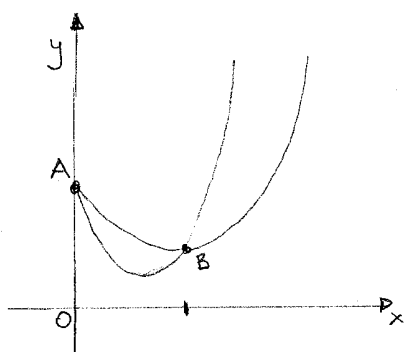


Fig: in questo caso passano due archi di catenaria congiungenti A e B .

□

CASO (4) : $f(x, u, \xi)$

Es. 1: Concludiamo questo studio degli estremali di F con la funzione lagrangiana $f(x, u, \xi) = \frac{\xi^2}{2} + g(x)u$ (caso generale dell'esempio 1, del caso (3.2) pag. 49) dipendente da x, u, ξ [ma molto particolare].

La funzione $g(x)$ è una funzione continua assegnata.

Vogliamo studiare

$$(P) \quad \inf_{u \in X} F(u) \quad \text{dove} \quad F(u) = \int_0^1 \left[\frac{1}{2} (u'(x))^2 + g(x)u(x) \right] dx$$

$$X = \{u \in \mathcal{C}([0, 1]) : u(0) = u(1) = 0\}.$$

Osserviamo che $F(u)$ è strettamente convesso (vedi Nota a fondo pag. 40) quindi un eventuale estremoale di F è

L'unico minimo assoluto del nostro problema variazionale (P).

