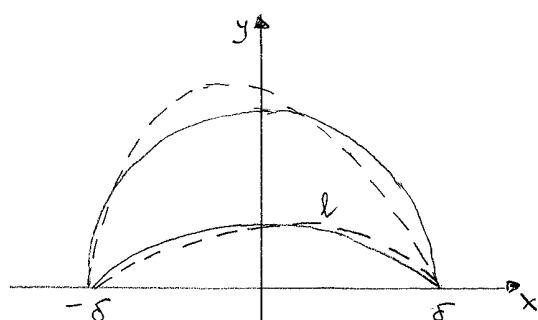


Vogliamo dare un'ulteriore applicazione del teorema dei moltiplicatori di Lagrange provando la "congettura" di Didone che il semicerchio è la regione di area massima con perimetro assegnato in un semipiano. La proviamo nell'ipotesi restrittiva che la curva con lunghezza assegnata nel semipiano sia grafico di una funzione.

Es. 3 (il problema di Didone - vedi pag. 9)



Supponiamo $2\delta < l$ (evidente significato geometrico).

Verifichiamo allora che

a) se $\delta > \frac{l}{\pi}$ (ossia $l < \delta\pi$), allora la funzione data da un arco di semicerchio (unico!)

minimizza

$$F(u) = - \int_{-\delta}^{\delta} u(x) dx$$

($\Leftrightarrow$ massimizza il funzionale area $\int_{-\delta}^{\delta} u(x) dx$) su

$$X = \{u \in C^1([- \delta, \delta]): u(-\delta) = u(\delta) = 0\} \text{ con il vincolo } G(u) = \int_{-\delta}^{\delta} \sqrt{1 + (u'(x))^2} dx = l$$

b) se $\delta = \frac{l}{\pi}$, allora la funzione data dal semicerchio è la soluzione (chiedendo solo $u_0 \in C([- \delta, \delta]) \cap C^1(\mathring{[- \delta, \delta]})$!) (questo è il caso più delicato!).

Consideriamo allora il funzionale strettamente convesso

$$\tilde{F}(u) = F(u) + \lambda G(u). \quad (*)$$

Se troviamo $\lambda > 0$ e una soluzione $u \in C^2$ dell'eq. di Eulero per $\tilde{F}$

$$(*) \delta G(u, \psi) = \int_{-\delta}^{\delta} \frac{u'(x) \psi'(x)}{\sqrt{1 + (u'(x))^2}} dx = \int_{-\delta}^{\delta} \frac{u''(x)}{\sqrt{1 + (u'(x))^2}} \psi(x) dx = 0 \quad \forall \psi \in C^1([- \delta, \delta]), \psi(-\delta) = \psi(\delta) = 0$$

$$\Leftrightarrow u''(x) = 0 \Leftrightarrow u(x) = ax + b.$$

Ma nessuna funzione di questo tipo è in X e soddisfa il vincolo $G(u) = l$.

che soddisfi sia le condizioni al contorno

$$u(-\delta) = u(\delta) = 0$$

che il vincolo isoperimetrico $G(u) = l$, questa sarà l'unica soluzione del ns. pbn. variazionale.

(nota: in questa discussione, si assume l'esistenza di una soluzione $\mathcal{C}^2$ del pbn. isoperimetrico. È tutt'altra questione come quest'esistenza possa essere stabilita).

L'eq. di Eulero-Lagrange per $\tilde{F}$ diventa

$$\frac{d}{dx} \left[\lambda \frac{u'(x)}{\sqrt{1+(u'(x))^2}} \right] = -1 \quad \text{in } [-\delta, \delta]$$

ossia

$$\frac{u'(x)}{\sqrt{1+(u'(x))^2}} = \frac{-x+c}{\lambda} \quad \text{in } [-\delta, \delta], \quad c \in \mathbb{R}.$$

Si ricava

$$u'(x) = \frac{c-x}{\lambda \sqrt{1 - \left(\frac{c-x}{\lambda}\right)^2}}$$

da cui

$$u(x) = \lambda \sqrt{1 - \left(\frac{c-x}{\lambda}\right)^2} + k.$$

Dalla condizione al contorno $u(-\delta) = u(\delta) = 0$ segue $c = 0$

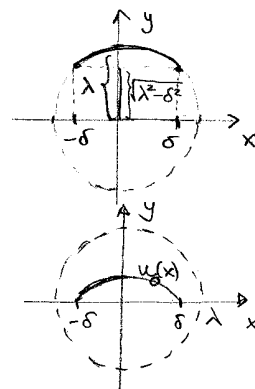
$k = -\sqrt{\lambda^2 - \delta^2}$. Allora risulta

$$u_0(x) = \sqrt{\lambda^2 - x^2} - \sqrt{\lambda^2 - \delta^2}$$

(arco di semicerchio) e si deve verificare se è possibile determinare $\lambda > \delta$ (altrimenti la soluzione non sarebbe definita e di classe $\mathcal{C}^1$ in $]-\delta, \delta[$)

tale che

$$G(u_0) = l.$$



Abbiamo

$$G(u) = \int_{-\delta}^{\delta} \sqrt{1 + (u'_0(x))^2} dx = \int_{-\delta}^{\delta} \sqrt{\frac{\lambda^2}{\lambda^2 - x^2}} dx = \lambda \int_{-\delta}^{\delta} \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - x^2}} dx$$

$$u'_0(x) = \frac{-x}{\sqrt{\lambda^2 - x^2}}$$

$$\stackrel{\substack{\uparrow \\ x = \lambda \sin t}}{=} \left[\lambda \arcsin \left(\frac{x}{\lambda} \right) \right]_{-\delta}^{\delta} = 2\lambda \arcsin \left(\frac{\delta}{\lambda} \right).$$

Poniamo $g(\lambda) \doteq 2\lambda \arcsin \left(\frac{\delta}{\lambda} \right)$. Allora $g(\delta) = \delta\pi$, $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} g(\lambda) =$

$$= \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{2 \arcsin \left(\frac{\delta}{\lambda} \right)}{\frac{\delta}{\lambda}} \cdot \delta = 2\delta. \text{ Provando che } g(\lambda) \text{ \u00e8 strettamente}$$

decrescente[⊛], possiamo allora concludere che $\exists!$ λ per cui la soluzione u_0 soddisfa il vincolo se $2\delta < l < \pi\delta$ (provando a); con evidente significato geometrico!

Per ottenere b) ci deve interessare le condizioni di Eulero-Lagrange anche a funzionali integrali impropri (nota: $\int_{-\delta}^{\delta} \frac{1}{\sqrt{\delta^2 - x^2}} dx$ esiste come integrale di Riemann generalizzato!) che ci permette di considerare funzioni u_0 la cui derivata "esplode" agli estremi del dominio.

Nel ns. caso

$$u_0(x) = \sqrt{\delta^2 - x^2} \quad \text{su }]-\delta, \delta[. \quad \square$$

⊛ Oss. Si prova che $g''(\lambda) > 0 \quad \forall \lambda > \delta$; quindi $g'(\lambda)$ risulta crescente. Da

$$\lim_{\lambda \rightarrow \delta^+} g'(\lambda) = -\infty \text{ e } \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} g'(\lambda) = 0 \text{ segue allora } g'(\lambda) < 0 \quad \forall \lambda > \delta. \text{ Ne segue}$$

$g(\lambda)$ strettamente decrescente su $[\delta, +\infty[$.

Diamo in seguito una dimostrazione della "congettura" di Bidone senza chiedere a priori l'esistenza di una soluzione e^2 ! Questa dimostrazione si basa sul teorema di Green nel piano e la disuguaglianza di Poincaré-Wirtinger provata a pag. 53.

Ricordiamo il seguente

Teorema (di Green nel piano)*: Sia Γ una curva chiusa, semplice regolare a tratti (*'), orientata positivamente che racchiude una regione A del piano. Allora

$$\text{area}(A) = \oint_{\Gamma} x dy = - \oint_{\Gamma} y dx.$$

Supponiamo, senza perdita di generalità, che la curva Γ di lunghezza $l = \pi$ (lo supp. per semplicità) sia posta nel semipiano $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$ e parametrizzata con la lunghetta d'arco s ,

$$\underline{Y}(s) = \begin{cases} X = x(s) \\ Y = y(s) \end{cases} \quad s \in [0, \pi] \quad y(0) = y(\pi) = 0$$

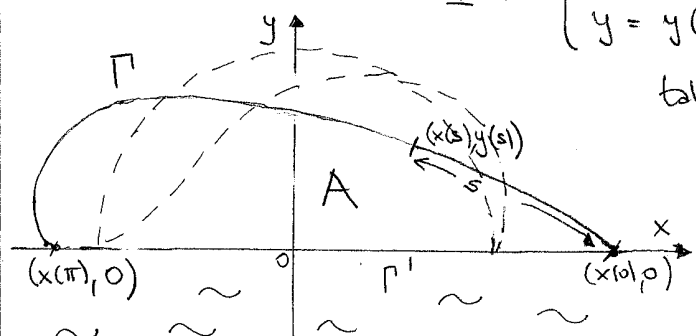
tale che Γ sia orientata positivamente.

Possiamo considerare una parametrizzazione del segmento Γ' congiungente $(x(\pi), 0)$ e $(x(0), 0)$ tale che

$\Gamma \cup \Gamma'$ sia orientata positivamente e racchiuda la regione A (è sottinteso che a Bidone è stato permesso di usare la costa del Mediterraneo, diciamo l'asse x , come parte della frontiera di A).

(*)' Γ di eq. $\underline{r} = \underline{r}(t)$ si dice regolare se $\underline{r} \in C^1([a,b])$ e $\underline{r}'(t) \neq 0 \forall t \in]a,b[$. Si dice regolare a tratti se I si può dividere nell'unione di un nr. finito di intervalli su ciascuno dei quali Γ è regolare.

(*) vale anche se Γ è solo rettificabile (cioè la sua lunghezza è limite delle lunghezze di curve poligonali approssimanti).



Dal teorema di Green segue allora

$$\text{area}(A) = - \oint_{\Gamma \cup \Gamma'} y dx = - \int_0^\pi y(s) x'(s) ds.$$

$\uparrow$
 $y(s) \equiv 0$ su Γ'

La congettura di Didone sarà allora provata vera se dimostriamo

che

$$(*) \quad - \int_0^\pi y(s) x'(s) ds \leq \frac{\pi}{2} \quad \left(= \text{area semicerchio nel semi-piano bordato da } \Gamma \right)$$

con = se e solo se A è il semicerchio.

Nota che

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} \int_0^\pi \left[(x'(s))^2 + (y'(s))^2 \right] ds \quad \left(\text{ricordate: } (x'(s))^2 + (y'(s))^2 \equiv 1 \right)$$

Quindi $(*)$ sarà provato se vale

$$-2 \int_0^\pi y(s) x'(s) ds \leq \int_0^\pi \left[(x'(s))^2 + (y'(s))^2 \right] ds$$

con = se e solo se A è il semicerchio, ossia

$$\int_0^\pi \left[(x'(s))^2 + (y'(s))^2 + 2y(s)x'(s) \right] ds \geq 0$$

con = se e solo se A è il semicerchio. Ora

$$\int_0^\pi \left[(x'(s))^2 + (y'(s))^2 + 2y(s)x'(s) \right] ds \geq \int_0^\pi \left[(x'(s))^2 + (y(s))^2 + 2y(s)x'(s) \right] ds$$

$\uparrow$
dim. di Polacore-Wirtinger
pag. 53 con $u = y$

con = se e solo se $y(s) = C \sin s$. Poiché

$$\int_0^\pi \left[(x'(s))^2 + (y(s))^2 + 2y(s)x'(s) \right] ds = \int_0^\pi (x'(s) + y(s))^2 ds \geq 0$$

e $= 0 \iff x'(s) = -y(s)$ in altre parole che vale $\leq$ in $(*)$

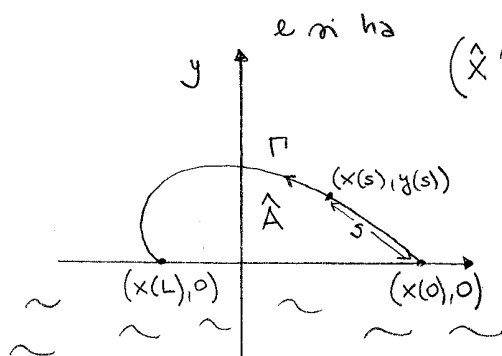
con = se e solo se $(x(s), y(s)) = (C \cos s, C \sin s)$. Poiché $l = \pi$, deve essere $C = 1$, concludendo così la dim. □

Oss. se la curva Γ ha lunghezza $l = L$ ed è parametrizzata con la lunghezza d'arco s ,

$$\underline{Y}(s) = \begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s) \end{cases} \quad s \in [0, L] \quad y(0) = y(L) = 0$$

tale che Γ sia orientata positivamente, allora possiamo introdurre la nuova parametrizzazione

$$\begin{aligned} \hat{x}(\tau) &= x\left(\frac{L\tau}{\pi}\right) \\ \hat{y}(\tau) &= y\left(\frac{L\tau}{\pi}\right) \end{aligned} \quad \tau \in [0, \pi] \quad \hat{y}(0) = \hat{y}(\pi) = 0$$



e si ha $(\hat{x}'(\tau))^2 + (\hat{y}'(\tau))^2 = \frac{L^2}{\pi^2}$.

Si ottiene allora, procedendo come sopra,

$$\text{area}(\hat{A}) = - \int_0^\pi \hat{y}(\tau) \hat{x}'(\tau) d\tau \leq \frac{L^2}{2\pi}$$

con = se e solo se $\begin{cases} \hat{x}(\tau) = \frac{L}{\pi} \cos \tau \\ \hat{y}(\tau) = \frac{L}{\pi} \sin \tau \end{cases} \quad \tau \in [0, \pi]$

ovvia = se e solo se $\hat{A}$ è il semicerchio (bordo nel semipiano da Γ).

□

Vogliamo infine provare la disuguaglianza isoperimetrica che dice che l'area di qualsiasi regione nel piano delimitata da una curva di lunghezza fissata non può mai superare l'area del cerchio il cui bordo ha tale lunghezza. Inoltre, se una regione ha la stessa lunghezza e l'area di un cerchio, allora deve essere un cerchio.

Ci sono tante dimostrazioni di questo fatto: riferisco all'articolo [Tr] per una panoramica più completa. Presentiamo qui la dimostrazione trovata da A. Hurwitz all'inizio del '900. Essa si basa

su una disuguaglianza di Pólya-Wirtinger leggermente diversa da quella che abbiamo già incontrata (pag. 53) e usata appena sopra.

OSS.1. Osserviamo infine che la disuguaglianza isoperimetrica mostra anche che il cerchio risolve il problema duale, cioè quello di trovare il sottoinsieme del piano di area assegnata e di perimetro minimo (vedi Esempio 4, pag. 17).

OSS.2. Si può dedurre dalla disuguaglianza isoperimetrica la validità della congettura di Didone. Infatti, consideriamo la costa (diciamo l'asse x) come specchio e riflettiamo la curva Γ , i cui punti sono $(x(s), y(s))$ nella curva $\hat{\Gamma}$, i cui punti sono $(x(s), -y(s))$. Allora la curva composta $\Gamma \cup \hat{\Gamma}$ ha lunghezza totale uguale a $2L$, e l'area massima inclusa è quella del cerchio. Centrando il cerchio sulla linea della costa si ottiene che i semicerchi superiori e inferiori coincidono per riflessione, e quindi il semicerchio superiore è la regione di area massima.

Lemma (disuguaglianza di Pólya-Wirtinger): Sia f una funzione 2π -periodica e di classe C^1 -a tratti. Sia $\bar{f}$ la media di f

$$\bar{f} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx.$$

Allora

$$\int_0^{2\pi} (f(x) - \bar{f})^2 dx \leq \int_0^{2\pi} (f'(x))^2 dx$$

con l'uguaglianza se e solo se $f(x) = \bar{f} + a \cos x + b \sin x$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Dim. La dimostrazione è molto simile a quella vista a pag. 53: si scrive f e f' in serie di Fourier $\left(f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right)$

dove $a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx \, dx$, $b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx \, dx$, e $\bar{f} = \frac{a_0}{2}$.

L'identità di Parseval ci dà

$$\int_0^{2\pi} (f(x) - \bar{f})^2 \, dx = \pi \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2),$$

mentre la disug. di Bessel garantisce

$$\int_0^{2\pi} (f'(x))^2 \, dx \geq \pi \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (a_k^2 + b_k^2);$$

allora
$$\int_0^{2\pi} (f'(x))^2 \, dx - \int_0^{2\pi} (f(x) - \bar{f})^2 \, dx \geq \pi \sum_{k=2}^{\infty} (k^2 - 1) (a_k^2 + b_k^2) \geq 0.$$

Infine, avremo l'uguaglianza nella disug. se e solo se per $k \geq 2$

$(k^2 - 1)(a_k^2 + b_k^2) = 0$, cioè se $a_k = b_k = 0$; allora $f(x) = \bar{f} + a \cos x + b \sin x$.

(per i dettagli vedete [Tr]: vedi fondo pag. 83)

□

Teorema (Disuguaglianza Isoperimetrica)*: Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$, bordata da una curva piana Γ , semplice, chiusa, regolare a tratti.

Allora

$$4\pi \text{ area}(A) \leq [\text{lunghezza}(\partial A)]^2 \quad \Gamma = \partial A$$

con l'uguaglianza se e solo se A è un cerchio di circonferenza uguale alla lunghezza di Γ .

Dim. Sia lunghezza di $\Gamma = L$; sia $\underline{Y}(s) = (x(s), y(s))$ la parametrizzazione di Γ per lunghezza d'arco; $x(s)$ e $y(s)$ siano funzioni $\mathcal{C}^1$ a tratti, L -periodiche e $(x'(s))^2 + (y'(s))^2 = 1$.

* Il teorema è ancora valido anche se ∂A è solo rettificabile!

Supponiamo inoltre che Γ sia orientata positivamente.

Procedendo come in Oss. a pag. 83, introduciamo le funzioni 2π -periodiche

$$\begin{aligned}\hat{x}(\tau) &= x\left(\frac{L\tau}{2\pi}\right) \\ \hat{y}(\tau) &= y\left(\frac{L\tau}{2\pi}\right)\end{aligned}\quad \tau \in [0, 2\pi]$$

e si ha

$$(*) \quad (\hat{x}'(\tau))^2 + (\hat{y}'(\tau))^2 = \frac{L^2}{4\pi^2}.$$

Dal teorema di Green (pag. 81), da $\int_0^{2\pi} \hat{y}'(\tau) d\tau = \hat{y}(2\pi) - \hat{y}(0) = 0$, dalla disuguaglianza di Poincaré-Wirtinger e $(*)$ sopra segue

$$\begin{aligned}2 \text{ area}(A) &= 2 \int_0^{2\pi} \hat{x}(\tau) \hat{y}'(\tau) d\tau = 2 \int_0^{2\pi} (\hat{x}(\tau) - \bar{\hat{x}}) \hat{y}'(\tau) d\tau \\ &= \int_0^{2\pi} [(\hat{x}(\tau) - \bar{\hat{x}})^2 + (\hat{y}'(\tau))^2 - (\hat{x}(\tau) - \bar{\hat{x}} - \hat{y}'(\tau))^2] d\tau \\ &\stackrel{(\odot)}{\leq} \int_0^{2\pi} [(\hat{x}'(\tau))^2 + (\hat{y}'(\tau))^2] d\tau \stackrel{(*)}{=} \frac{L^2}{4\pi^2} \cdot 2\pi = \frac{L^2}{2\pi^2}\end{aligned}$$

che è la disuguaglianza isoperimetrica. Per avere l'uguaglianza, dobbiamo avere l'uguaglianza nella disug. di Poincaré-Wirtinger e quindi

$$\hat{x}(\tau) = \bar{\hat{x}} + a \cos \tau + b \sin \tau \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

ed inoltre deve essere (per avere l'uguaglianza)

$$\int_0^{2\pi} (\hat{x}(\tau) - \bar{\hat{x}} - \hat{y}'(\tau))^2 d\tau = 0,$$

e quindi $\hat{y}'(\tau) = \hat{x}(\tau) - \bar{\hat{x}}$, e quindi $\hat{y}(\tau) = \bar{\hat{y}} + a \sin \tau - b \cos \tau$.

Allora $(*)$ implica

$$a^2 + b^2 = \frac{L^2}{4\pi^2},$$

e quindi $(x(s), y(s))$ è un cerchio di raggio $\frac{L}{2\pi}$. □

Equazione di Eulero-Lagrange e lemma di Du Bois-Reymond: la sorpresa!

- Abbiamo già osservato che un estremo debole (di classe $\mathcal{C}^1$) di F non è necessariamente $\mathcal{C}^2$ ^(*); nonostante questo, vedremo che sarà soddisfatta l'eq. di Eulero-Lagrange (ricordiamo che, per passare dalla forma debole alla forma forte dell'eq. di Eulero-Lagrange abbiamo avuto bisogno che i punti stazionari di F fossero di classe $\mathcal{C}^2$!!...). Inoltre vedremo che quest'eq. risulta verificata anche se $f_{ij}(x, u, \dot{u})$ è supposta solo continua!! (osservo più subito che in questo caso l'eq. di Eulero-Lagrange deve essere interpretata bene). Tutto questo sarà dimostrato mediante i due risultati qui sotto.
- Riusciamo anche a determinare l'eq. di Eulero-Lagrange per estremali $\mathcal{C}^1_{\text{tratti}}$. Notiamo che abbiamo già visto (vedi pag. 38) ^(**) che ci sono problemi variazionali, per i quali ci riduce aspettare soluzioni che hanno punti angolosi (è naturale allora lavorare con lo spazio di funzioni $\mathcal{C}^1_{\text{tratti}}$) e per i quali non riusciamo a trovare una soluzione del problema variazionale se rimaniamo nell'ambito delle funzioni $\mathcal{C}^1$.

Lemma (di Du Bois-Reymond) ^(**): sia $g \in \mathcal{C}([a, b])$ tale che

$$\int_a^b g(x) v'(x) dx = 0 \quad \forall v \in \mathcal{C}^1([a, b]) \text{ con } v(a) = v(b) = 0.$$

Allora esiste $c \in \mathbb{R}$ t.c. $g(x) = c \quad \forall x \in [a, b]$.

- ^(*) vedi pag. 37 : $F(u) = \int_{-1}^1 u^2(x) (2x - u'(x))^2 dx$ $X = \{u \in \mathcal{C}^1([-1, 1]) : u(-1) = u(1) = 0\}$;
allora $u(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [-1, 0] \\ x^2 & \text{se } x \in [0, 1] \end{cases} \in X$,
è una funzione minimizz. (unica) di F in X , $u \notin \mathcal{C}^2([-1, 1])$. $\square$
- ^(**) vedi pag. 38 : $F(u) = \int_0^1 ((u'(x))^2 - 1) dx$ $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0, 1]) : u(0) = u(1) = 0\}$ $\square$
- ^(**) vale con ipotesi molto più deboli! (es. $g \in L^1(a, b)$).

Dim. Sia $\phi \in \mathcal{C}([a,b])$ con $\phi(a) = \phi(b) = 0$. Poniamo

$$w(x) = \phi(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b \phi(t) dt \quad \text{e} \quad v(x) = \int_a^x w(t) dt.$$

Allora $w \in \mathcal{C}^1([a,b])$, $w(a) = w(b) = 0$ e per ipotesi abbiamo

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b g(x) w'(x) dx = \int_a^b g(x) \left[\phi(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b \phi(t) dt \right] dx \\ &= \int_a^b \left[g(x) \phi(x) - g(x) \frac{1}{b-a} \int_a^b \phi(t) dt \right] dx \\ &= \int_a^b \left[g(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b g(t) dt \right] \phi(x) dx \end{aligned}$$

dove, nell'ultimo passaggio, abbiamo scambiato l'ordine di integrazione nel secondo termine (e scambiato il nome delle variabili d'integrazione). Per il lemma fondamentale del calcolo delle variazioni (pag. 29) abbiamo

$$g(x) = \frac{1}{b-a} \int_a^b g(t) dt \quad \forall x \in [a,b]. \quad \square$$

Corollario: Siano $g, h \in \mathcal{C}([a,b])$ tali che

$$\int_a^b [g(x) w'(x) + h(x) w(x)] dx = 0 \quad \forall w \in \mathcal{C}^1([a,b]) \text{ con } w(a) = w(b) = 0.$$

Allora $g \in \mathcal{C}^1([a,b])$ e $g'(x) = h(x) \quad \forall x \in [a,b]$.

Dim. Poniamo $\tilde{g}(x) = \int_a^x h(t) dt$: allora $\tilde{g} \in \mathcal{C}^1([a,b])$ e $\tilde{g}'(x) = h(x)$.

Allora, $\forall w \in \mathcal{C}^1([a,b])$ con $w(a) = w(b) = 0$

$$\int_a^b [g(x) - \tilde{g}(x)] w'(x) dx = - \int_a^b h(x) w(x) dx + \int_a^b \tilde{g}'(x) w(x) dx,$$

dove per il primo integrale al membro destro abbiamo usato l'ipotesi, mentre per il secondo integrale abbiamo applicato l'integrazione per parti. Poiché $\tilde{g}'(x) = h(x) \quad \forall x \in [a, b]$, si ottiene

$$\int_a^b [g(x) - \tilde{g}(x)] v'(x) dx = 0 \quad \forall v \in \mathcal{C}^1([a, b]) \text{ con } v(a) = v(b) = 0.$$

Dal lemma di Du Bois-Reymond segue che $\exists c \in \mathbb{R}$ t.c.

$$g(x) - \tilde{g}(x) = c \quad \forall x \in [a, b] \quad (\Rightarrow g(a) - \underset{0}{\tilde{g}(a)} = c).$$

Ne segue

$$g(x) = g(a) + \int_a^x h(t) dt,$$

ossia la tesi. □

Segue allora il seguente importante

Teorema : Sia $f \in \mathcal{C}^1([a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ e sia

$$F(u) = \int_a^b f(x, u(x), u'(x)) dx \quad u \in \mathcal{C}^1([a, b]).$$

Sia $u \in \mathcal{C}^1([a, b])$ un estremo debole di F , cioè u soddisfa l'eq. di Eulero-Lagrange debole

$$\delta F(u, v) = \int_a^b \left[f_u(x, u(x), u'(x)) v(x) + f_{u'}(x, u(x), u'(x)) v'(x) \right] dx = 0$$

$\forall v \in \mathcal{C}^1([a, b]) \text{ con } v(a) = v(b) = 0.$

Allora, la funzione composta $x \mapsto f_{u'}(x, u(x), u'(x))$ è di classe $\mathcal{C}^1([a, b])$ e

$$\frac{d}{dx} [f_{u'}(x, u(x), u'(x))] = f_u(x, u(x), u'(x)) \quad \text{su } [a, b],$$

cioè vale l'eq. di Eulero-Lagrange forte!

Dim. Segue immediatamente dal Corollario precedente. □

OSS. Poiché in generale né u né f sono di classe $\mathcal{C}^2$, non possiamo applicare la regola di derivazione di funzione composta* per derivare $f_{\xi}(\cdot, u, u')$. In questo caso è più espressivo scrivere la condizione necessaria data dall'eq. di Eulero in forma integrale (detta qualche volta anche equazione di Du Bois-Reymond):
esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$(EEI) \quad f_{\xi}(x, u(x), u'(x)) = \int_a^x f_{\eta}(t, u(t), u'(t)) dt + c.$$

$$\forall x \in]a, b[.$$

Esempi spezzati

Estendendo la discussione appena fatta, vediamo di ottenere qualche condizione necessaria per funz. minimizzanti del funzionale integrale

$$F(u) = \int_a^b f(x, u(x), u'(x)) dx$$

nella classe delle funzioni regolari a tratti, $\mathcal{C}_{\text{tratti}}^1([a, b])$.

Ricordiamo che $u \in \mathcal{C}_{\text{tratti}}^1([a, b])$ se $u \in \mathcal{C}([a, b])$ e se $\exists$ un nr.

finito di punti $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ tale che $u \in \mathcal{C}^1([x_i, x_{i+1}])$.

Quindi una tale funzione u è derivabile eccetto in un numero finito

di punti $x_1, \dots, x_n$, dove esistono però almeno $u'_-(x_i) = \lim_{x \rightarrow x_i^-} u'(x)$

e $u'_+(x_i) = \lim_{x \rightarrow x_i^+} u'(x)$ finiti. Se

$u'_-(x_i) \neq u'_+(x_i)$, $1 \leq i \leq n$, allora x_i prende il nome di punto angoloso di u .

(*) Notiamo che in generale non possiamo scrivere il membro sinistro dell'eq. di Eulero-Lagrange nel teorema precedente nella forma differenziata

$$\frac{d}{dx} f_{\xi}(x, u(x), u'(x)) = f_{\xi x}(x, u(x), u'(x)) + f_{\xi u}(x, u(x), u'(x)) u'(x) + f_{\xi \eta}(x, u(x), u'(x)) u''(x). \quad \square$$