Sia allora

$$(P)_{tratti} \quad \inf\left\{F(u)=\int_a^b f(x,u(x),u'(x))\,dx : u\in \mathcal{C}^1_{tratti}([a,b]);\ u(a)=\alpha,\ u(b)=\beta\right\}$$

$\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ assegnati.

Vale il seguente

<u>Teorema (di Eulero per estremali spezzati)</u>: Sia $f\in\mathcal{C}^1([a,b]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R})$.

i) Se u_0 è una funzione minimizzante per $(P)_{tratti}$, allora vale l'eq. di Eulero-Lagrange in forma integrale, i.e. $\exists\, c\in\mathbb{R}$ t.c.

$$f_\xi(x,u_0(x),u_0'(x)) = \int_a^x f_u(t,u_0(t),u_0'(t))\,dt + c \qquad \forall x\in\,]a,b[.$$

In particolare, la funzione $x\mapsto f_\xi(x,u_0(x),u_0'(x))$ è ovunque continua, per cui in ogni punto angoloso $\bar{x}$ vale la

<u>1ª condizione di Erdmann</u>: $f_\xi(\bar{x},u_0(\bar{x}),u_{0-}'(\bar{x})) = f_\xi(\bar{x},u_0(\bar{x}),u_{0+}'(\bar{x}))$.

In tutti i punti di continuità di u_0' vale l'eq. di Eulero-Lagrange in forma differenziale.

ii) Se u_0 è una funzione minimizzante per $(P)_{tratti}$, $\exists\, c^*\in\mathbb{R}$ t.c.

(*)
$$f(x,u_0(x),u_0'(x)) - u_0'(x)\,f_\xi(x,u_0(x),u_0'(x)) = \int_a^x f_x(t,u_0(t),u_0'(t))\,dt + c^* \qquad \forall x\in\,]a,b[.$$

In particolare, la funzione $x\mapsto f(x,u_0(x),u_0'(x)) - u_0'(x)\,f_\xi(x,u_0(x),u_0'(x))$ è ovunque continua, per cui in ogni punto angoloso $\bar{x}$ vale la

<u>2ª condizione di Erdmann</u>:
$$f(\bar{x},u_0(\bar{x}),u_{0-}'(\bar{x})) - u_{0-}'(\bar{x})\,f_\xi(\bar{x},u_0(\bar{x}),u_{0-}'(\bar{x})) = f(\bar{x},u_0(\bar{x}),u_{0+}'(\bar{x})) - u_{0+}'(\bar{x})\,f_\xi(\bar{x},u_0(\bar{x}),u_{0+}'(\bar{x}))$$

(*) è la forma integrale dell'eq. (EE)' a pag. 43. Inoltre se $f(x,u,\xi)=f(u,\xi)$ abbiamo $\Phi(u_0(x),u_0'(x))\equiv$ cost in $]a,b[$!

NOTA: Vogliamo sottolineare che le condizioni di Erdmann (qualche volta anche dette condizioni di Weierstrass-Erdmann) dimostrano che le uniche discontinuità di u_0' che sono permesse in punti angolosi di un estremale u_0 sono quelle che preservano la continuità di entrambe le funzioni f_ξ e $(f - u_0' f_\xi)$.
Notiamo anche che da ⊛ segue che se $f_x \equiv 0$, allora $f - u_0' f_\xi$ risulta costante.

Dim (teorema): i) Si procede analogamente al caso delle funzioni $\mathcal{C}^1([a,b])$ (vedi, per esempio, [T], § 7.3 ; [BM] § 2.4-2.5): spezzando l'integrale in cui la derivata è continua e usando il lemma di du Bois-Reymond per funzioni $\mathcal{C}^1_{\text{tratti}}$.

ii) La dimostrazione in questo caso è meno immediata (occorre fare una variazione dell'estremale u_0 usando un'opportuna famiglia ad un parametro di diffeomorfismi dell'intervallo $[a,b]$ in sé ! . Per una dim. vedi [BM], § 9.3 ; [T] § 7.3; [GH] Chap. 3, § 3.3 Prop. 1).

□

Vediamo in azione il teorema precedente per studiare due problemi di minimo, di cui uno è il paradosso di Eulero già visto a pag. 38.

[BM] : U. Brechtken-Manderscheid : Einführung in die Variationsrechnung Wissenschaftliche Buchgesellschaft Darmstadt, 1983.

<u>Es. 1</u> (Paradosso di Eulero). La funzione $f(x,u,\xi) = f(\xi) = (\xi^2-1)^2$ dà il funzionale integrale

$$F(u) = \int_0^1 \left((u'(x))^2 - 1\right)^2 dx .$$

Come abbiamo già osservato a pag. 38 (*), le funzioni che rendono minimo F sono quelle le cui derivate sono a tratti $+1$ oppure -1. In particolare, se $Y = \{u \in \mathcal{C}^1_{\text{tratti}}([0,1]) : u(0)=u(1)=0\}$

$$0 = \min_{u\in Y} F(u) = F(u_0) \qquad u_0(x) = \begin{cases} x & \text{se } x\in[0,\frac{1}{2}] \\ 1-x & \text{se } x \in [\frac{1}{2},1]. \end{cases}$$

Inoltre, la funzione minimizzante non è unica (ogni funzione $\mathcal{C}^1_{\text{tratti}}$ a "zig-zag" con pendenza 1 o -1 soddisfacente $|u'|=1$ nei punti angolosi e soddisfacente le condizioni al bordo è una funzione minimizzante).

Vogliamo ora "dimenticare" queste considerazioni, e indagare su questo semplice esempio l'efficacia delle condizioni necessarie della prima variazione ottenute nel teorema precedente.

Una funzione minimizzante $\mathcal{C}^1_{\text{tratti}}([0,1])$ u di F deve essere un punto critico (soddisfa l'eq. di Eulero-Lagrange in forma differenziale) negli intervalli non contenenti punti angolosi, nei quali entrambe le funzioni

$$f_\xi(u') = 4u'(u'^2-1)$$

$$\begin{aligned} f(u') - u' f_\xi(u') &= (u'^2-1)^2 - 4u'^2(u'^2-1) = \\ &= (u'^2-1)(-3u'^2-1) \end{aligned}$$

sono continue. Inoltre, essendo $f_x = 0$, l'ultima funzione risulta

(*) Abbiamo visto che $\inf_{u\in X} F = 0$ con $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0)=u(1)=0\}$, ma $\nexists\, u_0 \in X$ t.c. $F(u_0) = 0$! $\square$

costante in $[0,1]$.

Dalla prima condizione segue quindi che u' deve essere continua tranne al più nei punti $\bar{x}$, dove $u'^2(\bar{x})=1$, e questi sono gli unici possibili punti angolosi.

Se u ha un punto angoloso su $[0,1]$, dalla seconda condizione si ha allora

$$(u'^2-1)(-3u'^2-1)\equiv 0 \quad \text{su } [0,1] \qquad (\text{cioè } c=0)$$

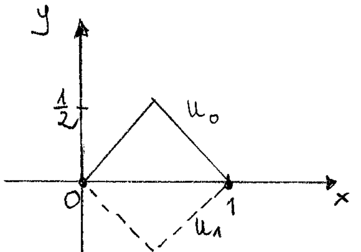
e quindi per ogni $x\in[0,1]$ si ha $(u'(x))^2=1$ $\quad (\text{poiché } -3u'^2-1\neq 0)$

Quindi una funzione u di classe $\mathcal{C}^1_{\text{tratti}}([0,1])$ minimizzante F sarà definita a tratti da

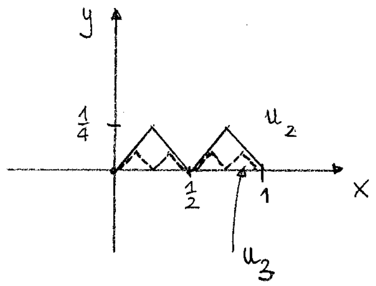
$$u(x)=\pm x+c \qquad c=\text{costante}, \ (*)$$

soddisferà le condizioni 1 e 2 nei pt. angolosi (altrimenti l'eq. di Eulero-Lagrange) e le condizioni al bordo $u(0)=u(1)=0$.

Esempi:



u_0 ha solo un pt. angoloso
u_1 "



u_2 ha 3 punti angolosi

u_3 ha 7 punti angolosi. $\square$

OSS. Consideriamo $Y^\beta=\{u\in\mathcal{C}^1_{\text{tratti}}([0,1]) : u(0)=0,\ u(1)=\beta\}$.

Da quanto visto sopra, il pbm. di minimo $\inf_{u\in Y^\beta} F(u)$.

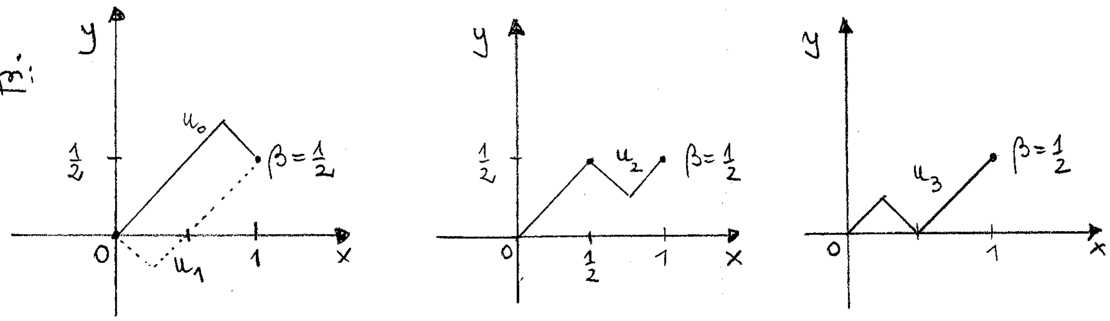
$(*)$ $\frac{d}{dx}\left[u'(x)(u'^2-1)\right]=0 \Rightarrow u'(x)=c_1 \Rightarrow u(x)=c_1x+c_2$

OSS. Poiché $0\leq F(u)$ $\forall u\in Y$, e per le u zig-zag ottenute sopra si ha $F(u)=0$, allora sono minimi!!

avrà soluzione se $|\beta| \leq 1$, altrimenti no!

<u>Esempi:</u>

$\beta = \frac{1}{2}$



— u_0 minimizzante

··· u_1 " per $\inf\limits_{u \in Y_{1/2}} F(u)$

— u_2 "

— u_3 "

$\square$

<u>Es. 2.</u> La funzione $f(x,u,\xi) = f(u,\xi) = u^2(1-\xi)^2$ dà il funzione integrale

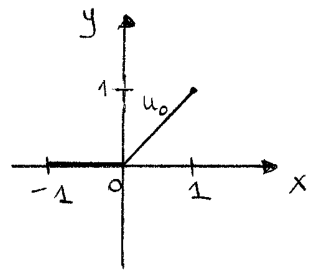
$$F(u) = \int_{-1}^{1} u^2(x)\,\left(1 - u'(x)\right)^2 dx .$$

Si vede subito che F ha minimo 0 in

$$Y = \left\{ u \in \mathcal{C}^1_{tratti}([-1,1]) : u(-1) = 0 \,,\; u(1) = 1 \right\},$$

e la funzione minimizzante è data da

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [-1,0] \\ x & \text{se } x \in [0,1] \end{cases}$$



con un punto angoloso in $x = 0$.

<u>NOTA</u>: Consid. $\forall \varepsilon > 0$ $u_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [-1,-\varepsilon] \\ \frac{1}{4\varepsilon}(x+\varepsilon)^2 & \text{se } x \in [-\varepsilon,\varepsilon] \\ x & \text{se } x \in [\varepsilon,1] \end{cases}$ si prova $\inf\limits_{u \in X} F = 0$ con $X = \{ u \in \mathcal{C}^1([-1,1]) : u(-1) = 0 \,; u(1) = 1 \}$ ma $\nexists\, u_0 \in X : F(u_0) = 0$.

Come nell' es. 1 vogliamo anche in questo esempio utilizzare il teorema precedente per ottenere la funzione minimizzante ottenuta "empiricamente" e per discutere più in generale, il probl. variazionale

$$\inf_{u \in Y^{\alpha,\beta}} F(u), \qquad \text{dove } Y^{\alpha,\beta} = \{u \in \mathcal{C}^1_{tratti}([-1,1]) : u(-1)=\alpha, \; u(1)=\beta\}.$$

Abbiamo dunque $f(x,u,\xi) = f(u,\xi) = u^2(1-\xi)^2$ su $[-1,1]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.
Una funzione minimizzante $\mathcal{C}^1_{tratti}([-1,1])$ u di F deve essere un punto critico (soddisfa l'eq. di Eulero-Lagrange in forma differenziale) negli intervalli non contenenti punti angolosi, nei quali entrambe le funzioni

$$f_\xi(u,u') = -2u^2(1-u')$$

$$\begin{aligned} f(u,u') - u' f_\xi(u,u') &= u^2(1-u')^2 + 2u^2u'(1-u') \\ &= u^2(1-\cancel{2u'}+u'^2+\cancel{2u'}-2u'^2) \\ &= u^2(1-u'^2) \end{aligned}$$

sono continue. Inoltre, essendo $f_x \equiv 0$, l'ultima funzione risulta costante su $[-1,1]$.
Poiché u é continua su $[-1,1]$, dalla prima condizione segue che u' è anche continua tranne al più nei punti $\bar{x}$, dove $u(\bar{x}) = 0$, e questi sono gli unici punti angolosi.

Allora, a meno che u non si annulla in qualche punto dell'intervallo $[-1,1]$, non ci può essere una funzione minimizz. $\in \mathcal{C}^1_{tratti}([-1,1])$.

Se u si annulla in un punto di $[-1,1]$, allora dalla seconda condizione si ha allora

$$u^2(x)\left(1-(u'(x))^2\right) \equiv 0 \qquad \text{su } [-1,1];$$

allora in ogni $x\in[-1,1]$ si ha: o $u(x)=0$, oppure $u'(x)=-1$ oppure $u'(x)=1$.

Mettendo insieme le due condizioni possiamo allora dire che una funzione minimizzante $\mathcal{C}^1_{\text{tratti}}([-1,1])$ che si annulla in un punto dell'intervallo $[-1,1]$ è come segue: si annulla su un singolo sottointervallo di $[-1,1]$ (che può anche ridursi ad un punto), al di fuori del quale la funzione è lineare con pendenza -1 o 1 (gli estremi del sottointervallo sono pt. angolosi!). Infine deve soddisfare le condizioni al bordo.

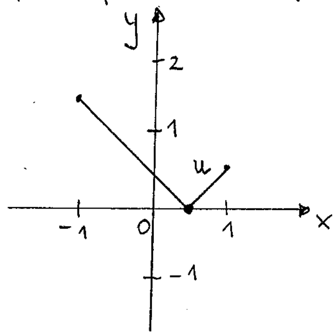
Abbiamo dunque che

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [-1, 0] \\ x & \text{se } x \in [0, 1] \end{cases}$$

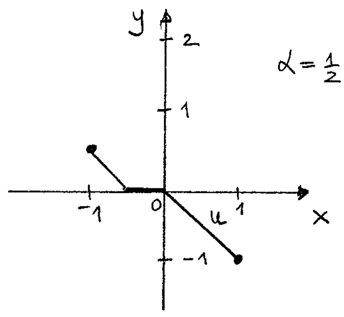
è l'unica possibile soluzione del probl. variazionale $\inf\limits_{u \in Y} F(u)$.

Alla luce di quanto detto sopra rappresentiamo la soluzione del probl. variazionale $\inf\limits_{u \in Y^{\alpha,\beta}} F(u)$ $\quad Y^{\alpha,\beta} = \{u \in \mathcal{C}^1_{\text{tratti}}([-1,1]) : u(-1) = \alpha,\ u(1) = \beta\}$

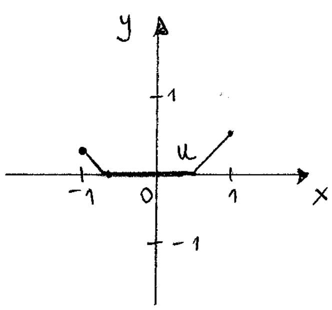
per qualche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:



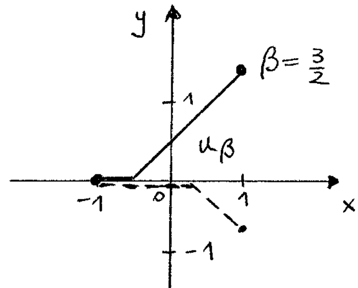
$\alpha = \frac{3}{2} \quad \beta = \frac{1}{2}$



$\alpha = \frac{1}{2} \quad \beta = -1$



$\alpha = \frac{1}{4} \quad \beta = \frac{1}{2}$



<u>OSS</u>: Se $|\beta| > 2$, allora il probl. variazionale $\inf\limits_{u \in Y^{0,\beta}} F(u)$ non ha soluzione!! □

Minimi relativi (locali) deboli e forti

Nota: Se $F \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, $\Omega =]a,b[$, allora oltre alla condizione $F'(x_0)=0$, anche la condizione $F''(x_0) \geq 0$ è necessaria per x_0 affinché sia un punto di minimo locale per F. Inoltre le condizioni
$F'(x_0)=0$ $\quad F''(x_0)>0$
sono sufficienti affinché x_0 sia un punto di minimo locale.

- Ora, consideriamo di nuovo l'integrale variazionale del tipo $F(u) = \int_a^b f(x,u,u')dx$. Abbiamo visto fino ad ora le condizioni necessarie per una funzione $u_0 \in \mathcal{C}^1([a,b])$ ($\mathcal{C}^2([a,b])$) per essere una funzione minimizzante che corrisponde all'equazione $F'(x_0)=0$, ossia

$$\delta F(u_0, v) = 0, \qquad \forall v \in \mathcal{C}^1([a,b]),\ v(a)=v(b)=0.$$

Condizioni sufficienti per avere proprietà di minimo (globale) per estremali, cioè funz. soddisf. $\delta F(u_0,v)=0$, viste fino ad ora erano basati su argomenti di convessità.

- Vogliamo ora studiare condizioni necessarie e sufficienti per un estremale affinché sia un minimo locale (relativo) o assoluto; esse sono strettamente legate alle ipotesi $F''(x_0) \geq 0$ e $F''(x_0) > 0$ nel caso di una funzione a variabile reale.
Avremo ancora come condizione necessaria $\delta^2 F(u_0, v) \geq 0$, mentre vedremo che la condizione di variazione seconda definita positiva, i.e.

$$\delta^2 F(u_0, v) > 0 \qquad \forall v \in \mathcal{C}^1([a,b])\ v(a)=v(b)=0,\ v \neq 0$$

non è più sufficiente per assicurare che u_0 sia un minimo locale (sia debole che forte; questi concetti vedi sotto) per F (vedi Es. Scheeffer, pag. 104).

Sia $f \in \mathcal{C}^2([a,b]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ e sia per $u \in \mathcal{C}^1([a,b])$

$$F(u) = \int_a^b f(x, u(x), u'(x)).$$

Consideriamo ora un sottoinsieme non-vuoto X (*) di $\mathcal{C}^1([a,b])$. Come in dimensione finita, è ragionevole dire che una funzione $u_0 \in X$ sia un <u>punto di minimo relativo (o locale)</u> di F in X se

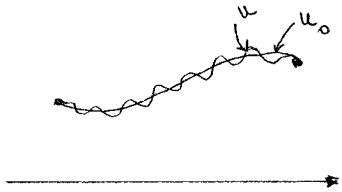
$$F(u_0) \leq F(u)$$

per ogni $u \in X$ che sia <u>sufficientemente vicina</u> ad u_0.

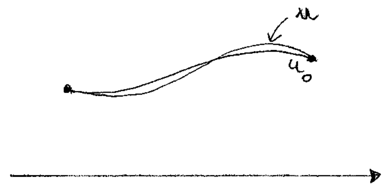
(*) per esempio $X = \{u \in \mathcal{C}^1([a,b]) : u(a)=\alpha,\ u(b)=\beta\}$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ assegnati.

Siccome siamo in dimensione infinita, ci sono più scelte, tutti naturali, per definire questa "vicinanza": scelte diverse porteranno a risultati diversi!!.

Seguendo l'approccio classico di A. Kneser e Zermelo (e Weierstrass), le due scelte usate corrispondono a misurare la distanza tra funzioni ammissibili con la norma $\mathscr{C}^0$ (*) (in corrispondenza parleremo di minimizzanti forti) o con la norma $\mathscr{C}^1$ (in corrispondenza parleremo di minimizzanti deboli).



La funzione u è "vicina" ad u_0 in norma $\mathscr{C}^0$



La funzione u è "vicina" ad u_0 in norma $\mathscr{C}^1$.

<u>Def.</u> Una funzione u_0 si dice <u>punto di minimo relativo debole</u> (**) per F in X se esiste $r>0$ tale che

$$F(u_0) \leq F(u) \qquad \forall u \in X \quad \text{t.c. } \|u-u_0\|_{\mathscr{C}^1} < r.$$

u_0 si dice <u>punto di minimo relativo forte</u> per F in X se esiste $r>0$ tale che

$$F(u_0) \leq F(u) \qquad \forall u \in X \quad \text{t.c. } \|u-u_0\|_{\mathscr{C}^0} < r.$$

Se le disuguaglianze sono strette per $u \neq u_0$, allora diciamo che il punto di minimo relativo debole (o forte) è <u>stretto</u> (o <u>isolato</u>).

(*) ho spesso denotato $\mathscr{C}^0$ semplicemente con $\mathscr{C}$; in questo caso vorrei sottolineare la differenza tra i due spazi $\mathscr{C}^0$ e $\mathscr{C}^1$ e quindi userò spesso la notazione $\mathscr{C}^0$.

(**) Quando parliamo di punti di minimo debole o forte è sottointeso che trattiamo con minimizzanti relativi (i.e. locali).

Ricordiamo che $\forall v \in \mathscr{C}^1([a,b])$ $\quad \|v\|_{\mathscr{C}^0} \doteq \max_{x\in[a,b]} |v(x)|$, $\quad \|v\|_{\mathscr{C}^1} \doteq \max_{x\in[a,b]} |v(x)| + \max_{x\in[a,b]} |v'(x)|$

NOTA: Si potrebbe obiettare che la topologia $\mathcal{C}^1$ è più forte della topologia $\mathcal{C}^0$ ... e che i minimi relativi forti (deboli) sono quelli definiti usando la topologia debole (forte)!!! Un po' strano, no?! Il fatto è che l'aggettivo

forte si riferisce al fatto che la condizione richiesta è più forte di quella che si richiede per i minimi deboli (ossia, la disuguaglianza $F(u_0) \leq F(u)$ deve essere soddisfatta per più funzioni u !!).

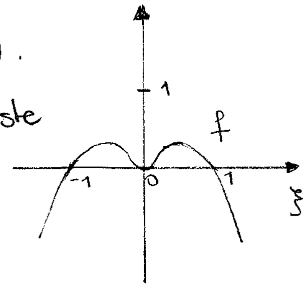
In effetti, è evidente che un punto di minimo relativo forte è anche un punto di minimo relativo debole. Il viceversa è falso come mostrano i prossimi esempi.

Esempio 1: Consideriamo $F(u) = \int_0^1 \left[(u'(x))^2 - (u'(x))^4 \right] dx$ su $X = \{ u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = u(1) = 0 \}$.

Proviamo che $u_0 \equiv 0$ è un punto di minimo relativo debole stretto di F, ma non è un punto di minimo relativo forte.

Abbiamo $f(x,u,\xi) = f(\xi) = \xi^2 - \xi^4 = \xi^2(1-\xi^2)$.

$\xi = 0$ è un pt. di minimo locale stretto per f; esiste $r > 0$ (per esempio $r = \frac{1}{2}$) t.c.



$$0 = f(0) \leq f(\xi) \quad \forall\ |\xi| < r .$$

Consideriamo allora $u \in X$ tale che $\|u - u_0\|_{\mathcal{C}^1} < r$; quindi $\forall x \in [0,1]$

$$0 = f(0) = f(u_0'(x)) \leq f(u'(x)). \quad ⊛$$

Integrando si ottiene

$$F(u_0) \leq F(u) \qquad \forall u \in X \text{ con } \|u - u_0\|_{\mathcal{C}^1} < r;$$

quindi $u_0 \in X$ è un punto di minimo relativo debole stretto per F (la disuguaglianza è stretta per $u \neq u_0$).

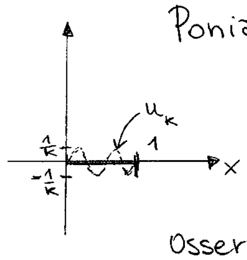
⊛ $|u'(x)| \leq \max_{x\in[0,1]} |u'(x)| + \max_{x \in [0,1]} |u(x)| = \|u\|_{\mathcal{C}^1} < r \quad \forall x \in [0,1]$.

Vediamo allora perché u_0 non è un punto di minimo relativo forte: dimostriamo che $\exists\, (u_k)_k \in X$ t.c.

$$u_k \longrightarrow u_0 \quad \text{uniformemente in } [0,1]$$

$$\int_0^1 f(u_k'(x))\,dx \longrightarrow -\infty$$

(quindi, definitivamente non può valere $F(u_0) \leq F(u_k)$).



Poniamo $u_k(x) = \frac{1}{k} \sin\left(2\pi k^2 x\right)$: allora $u_k \in X \quad \forall k \geq 1$

$$\| u_k - u_0 \|_{\mathcal{C}^0} = \| u_k \|_{\mathcal{C}^0} = \max_{x \in [0,1]} \left| \frac{1}{k} \sin(2\pi k^2 x) \right| = \frac{1}{k} \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0 .$$

Osserviamo che

$$u_k'(x) = \frac{2\pi k^{\cancel{2}}}{\cancel{k}} \cos\left(2\pi k^2 x\right)$$

che non converge uniformemente alla derivata di u_0 !

Abbiamo

$$F(u_k) = \int_0^1 \left[\left(u_k'(x)\right)^2 - \left(u_k'(x)\right)^4 \right] dx = \int_0^1 \left[4\pi^2 k^2 \cos^2\left(2\pi k^2 x\right) - 16\pi^4 k^4 \cos^4\left(2\pi k^2 x\right) \right] dx$$

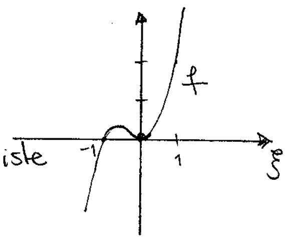
$$= \overset{2}{\cancel{4}} \pi^2 k^2 \cdot \frac{1}{\cancel{2}} - \overset{2}{\cancel{16}} \pi^4 k^4 \cdot \frac{3}{\cancel{8}} = 2\pi^2 k^2 \left(1 - 3k^2 \pi^2\right) \xrightarrow[k \to +\infty]{} -\infty$$

$\square$

Esempio 2 (Scheeffer): Consideriamo $F(u) = \int_0^1 \left[\left(u'(x)\right)^2 + \left(u'(x)\right)^3 \right] dx$ su $X = \{ u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = u(1) = 0 \}$.

Proviamo che $u_0 \equiv 0$ è un punto di minimo relativo debole stretto di F, ma non è un punto di minimo relativo forte.

Abbiamo $f(x, u, \xi) = f(\xi) = \xi^2 + \xi^3 = \xi^2 (1 + \xi)$



$\xi = 0$ è un punto di minimo locale stretto per f: esiste $r > 0$ (per esempio $r = \frac{1}{2}$) t.c.

$$0 = f(0) \leq f(\xi) \qquad \forall\ |\xi| < r.$$

e la disuguaglianza stretta se $\xi \neq 0$.

Consideriamo allora $u \in X$ tale che $\|u - u_0\|_{\mathcal{C}^1} < r$; quindi $\forall x \in [0,1]$

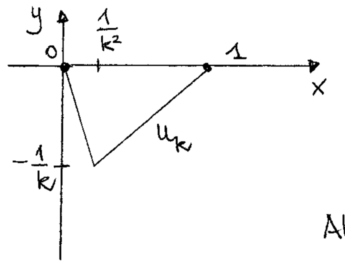
$$0 = f(0) = f(u_0'(x)) \leq f(u'(x)) .$$

Integrando si ottiene

$$F(u_0) \leq F(u) \qquad \forall u \in X \text{ con } \|u - u_0\|_{\mathcal{C}^1} < r ;$$

ne segue che $u_0 \in X$ è un punto di minimo relativo debole (stretto).

D'altra parte, consideriamo le seguenti funzioni lineari a tratti



$$u_k(x) = \begin{cases} -kx & \text{se } x \in \left[0, \frac{1}{k^2}\right] \\ \frac{k}{k^2-1}(x-1) & \text{se } x \in \left[\frac{1}{k^2}, 1\right] . \end{cases} \qquad k \geq 2$$

Allora $u_k(0) = u_k(1) = 0$.

Inoltre
$$u_k'(x) = \begin{cases} -k & \text{se } x \in \left[0, \frac{1}{k^2}\right] \\ \frac{k}{k^2-1} < 1 & \text{se } x \in \left]\frac{1}{k^2}, 1\right] \end{cases}$$

e quindi

$$u_k'^2(x) + u_k'^3(x) \leq \begin{cases} k^2 - k^3 \leq -\frac{k^3}{2} & \text{se } x \in \left[0, \frac{1}{k^2}\right] \\ 2 & \text{se } x \in \left]\frac{1}{k^2}, 1\right] . \end{cases}$$

Abbiamo

(*)
$$F(u_k) = \int_0^1 \left[(u_k'(x))^2 + (u_k'(x))^3 \right] dx \leq -\frac{k^3}{2} \cdot \frac{1}{k^2} + 2\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \xrightarrow[k \to +\infty]{} -\infty .$$

Inoltre, da $|u_k(x)| \leq \frac{1}{k}$ $\forall x \in [0,1]$ segue

(**)
$$\lim_{k \to +\infty} \|u_k - u_0\|_{\mathcal{C}^0} = 0 .$$

<u>OSS.</u> Le funzioni u_k sono solo funzioni $\mathcal{C}^1_{\text{tratti}}([0,1])$! Possiamo però facilmente smussare le $u_k(x)$ nei punti angolosi $x = \frac{1}{k^2}$, ottenendo funzioni $\tilde{u}_k$ di classe $\mathcal{C}^1([0,1])$, nulle sul bordo, soddisfacenti (*) e (**) e $\|\tilde{u}_k - u_0\|_{\mathcal{C}^1} \geq \max_{x \in [0,1]} |\tilde{u}_k'(x)| = k \xrightarrow[k \to +\infty]{} +\infty$.

Concludiamo allora che $u_0 \equiv 0$ non è un punto di minimo relativo forte di F.

$\square$

Tutte le condizioni necessarie per i punti di minimo (assoluti o globali) trovate fino ad ora per i funzionali integrali valgono ovviamente per i punti di minimo relativi (anche soltanto deboli).

Prima di enunciare la proposizione a riguardo, per $f \in \mathcal{C}^2([a,b]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ ricordiamo la definizione della seconda variazione $\delta^2 F(u,v)$ di F in u nella direzione di $v \in \mathcal{C}^1([a,b])$:

$$\delta^2 F(u,v) \doteq \frac{d^2}{dt^2} F(u+tv)\Big|_{t=0} .$$

Facendo il conto si ottiene che

$$\delta^2 F(u,v) = \int_a^b \left[f_{uu}(x,u,u')\, v^2(x) + 2 f_{u\xi}(x,u,u')\, v(x) v'(x) + f_{\xi\xi}(x,u,u') (v'(x))^2 \right] dx.$$

Proposizione : Sia $f \in \mathcal{C}^2([a,b]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R})$.

i) Se u_0 è un punto di minimo relativo debole di F su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([a,b]) : u(a)=\alpha, u(b)=\beta\}$ allora

$$\delta F(u_0, v) = 0 , \qquad \delta^2 F(u_0,v) \geq 0$$

per ogni $v \in \mathcal{C}^1([a,b])$ con $v(a)=v(b)=0$.

ii) Viceversa, se $u_0 \in X$ è un estremale debole di F (cioè $\delta F(u_0,v)=0$ $\forall v \ldots$) e se $\exists\, \lambda > 0$ tale che

$$\delta^2 F(u_0,v) \geq \lambda \int_a^b \left[(v(x))^2 + (v'(x))^2 \right] dx$$

per ogni $v \in \mathcal{C}^1([a,b])$ con $v(a)=v(b)=0$, allora u_0 è un punto di minimo relativo debole stretto per F su X.

Prima di dare la dim. di questa proposizione, osserviamo che in ii) si richiede che la variazione seconda non solo sia positiva, ma che sia controllata opportunamente da sotto. Infatti, il prossimo esempio ci prova che le condizioni

$$\delta F(u_0, v) = 0 \qquad \delta^2 F(u_0, v) > 0$$

per ogni $v \in \mathscr{C}^1([a,b])$ con $v(a) = v(b) = 0$, $v \not\equiv 0$ non sono sufficienti per garantire che u_0 sia un punto di minimo relativo debole per il problema variazionale considerato.

<u>Esempio (Scheeffer):</u> Consideriamo il funzionale

$$F(u) = \int_{-1}^{1} \left[x^2 (u'(x))^2 + x\,(u'(x))^3 \right] dx \quad ⊛$$

su $X = \{ u \in \mathscr{C}^1([-1,1]) : u(-1) = u(1) = 0 \}$. Abbiamo $\forall\, u, v \in X$

$$\delta F(u,v) = \int_{-1}^{1} \left[f_u(x,u,u')\,v + f_\xi(x,u,u')\,v' \right] dx$$
$$= \int_{-1}^{1} \left[2x^2 u'(x) + 3x\,(u'(x))^2 \right] v'(x)\,dx$$

e

$$\delta^2 F(u,v) = \int_{-1}^{1} \left[f_{uu}(x,u,u')\,v^2(x) + 2 f_{u\xi}(x,u,u')\,v(x)\,v'(x) + f_{\xi\xi}(x,u,u')\,(v'(x))^2 \right] dx$$
$$= \int_{-1}^{1} \left[2x^2 + 6x\,u'(x) \right] (v'(x))^2\,dx .$$

Allora la funzione $u_0(x) \equiv 0$ è un estremale di F (ovvio $\delta F(0,v) = 0$ $\forall v \in X$) e la sua seconda variazione soddisfa

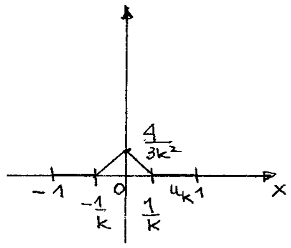
$$\delta^2 F(0,v) = 2\int_{-1}^{1} x^2 (v'(x))^2\,dx > 0 \qquad \forall\, v \in X \text{ con } v(x) \not\equiv 0.$$

Vediamo ora che u_0 non è un punto di minimo relativo debole.

⊛ $f(x,u,\xi) = f(x,\xi) = x^2\xi^2 + x\,\xi^3$ $\qquad f_\xi(x,u,\xi) = 2x^2\xi + 3x\,\xi^2$

$f_{\xi\xi}(x,u,\xi) = 2x^2 + 6x\,\xi$

Consideriamo le seguenti funzioni



$$u_k(x) = \begin{cases} \frac{4}{3k}\left(x + \frac{1}{k}\right) & \text{se } x \in \left]-\frac{1}{k}, 0\right] \\ -\frac{4}{3k}\left(x - \frac{1}{k}\right) & \text{se } x \in \left]0, \frac{1}{k}\right] \\ 0 & \text{altrimenti in } [-1,1] \end{cases} \qquad k \geq 2$$

e
$$F(u_k) = \int_{-1}^{1} \left[x^2 (u_k')^2 + x (u_k')^3\right] dx =$$
$$= \int_{-\frac{1}{k}}^{0} \left[x^2 \left(\frac{4}{3k}\right)^2 + x\left(\frac{4}{3k}\right)^3\right] dx + \int_0^{\frac{1}{k}} \left[x^2\left(-\frac{4}{3k}\right)^2 - x\left(\frac{4}{3k}\right)^3\right] dx$$
$$= -\frac{32}{27k^5} .$$

Se arrotondiamo u_k nei punti angolosi otteniamo funzioni $\tilde{u}_k \in \mathcal{C}^1([-1,1])$, nulle sul bordo, e $\tilde{u}_k$ converge a u_0 in norma $\mathcal{C}^1$, per $k \to +\infty$, mentre

$$F(\tilde{u}_k) < 0 = F(0). \qquad \square$$

Proviamo allora la proposizione a pag. 103.

<u>Dim.</u> i) Sia $u_0 \in X$ un pt. di minimo relativo debole di F. Allora
$F(u_0) \leq F(u_0 + tv)$ per ogni $v \in \mathcal{C}^1$, $v(a) = v(b) = 0$ e t suff. piccolo. Ne segue che la funzione $\phi(t) = F(u_0 + tv)$ è definita in un intorno di 0, è di classe $\mathcal{C}^2$ e ha minimo locale per $t = 0$. Abbiamo allora $\phi'(0) = 0$ e $\phi''(0) \geq 0$; i.e.

$$\delta F(u_0, v) = 0 \quad , \quad \delta^2 F(u_0, v) \geq 0$$

per ogni $v \in \mathcal{C}^1([a,b])$ con $v(a) = v(b) = 0$.

ii) Dalla uniforme continuità delle derivate seconde sui compatti e dalla diseguaglianza $2ab \leq a^2 + b^2$ segue facilmente che $\exists r > 0$

tale che se $\|u-u_0\|_{\mathcal{C}^1} < r$ allora

$$|\delta^2 F(u,v) - \delta^2 F(u_0,v)| \le \frac{\lambda}{2}\int_a^b [v^2 + v'^2]\,dx$$

e quindi

$$\delta^2 F(u,v) \geq \frac{\lambda}{2}\int_a^b [v^2 + v'^2]\,dx \qquad \text{(usando la stima in ii))}$$

$\forall v \in \mathcal{C}^1([a,b])$ con $v(a) = v(b) = 0$.

Consideriamo allora $u \in X$ con $\|u-u_0\|_{\mathcal{C}^1} < r$ arbitraria.
Allora, $\forall t \in [0,1]$ anche la funzione $\Psi(t) \doteq u_0 + t(u-u_0) \in X$, inoltre $\|\Psi(t) - u_0\|_{\mathcal{C}^1} < r$ e soddisfa quindi

$$(*) \qquad \delta^2 F(\Psi(t), u-u_0) \geq \frac{\lambda}{2}\int_a^b [(u-u_0)^2 + (u'-u_0')^2]\,dx.$$

Consideriamo la funzione di classe $\mathcal{C}^2$

$$H(t) \doteq F(\Psi(t)) \qquad t \in [0,1].$$

Allora per la formula di Taylor con resto integrale abbiamo

$$H(1) = H(0) + H'(0) + \int_0^1 (1-t)H''(t)\,dt$$

Poiché

$$H'(0) = \delta F(u_0, u-u_0) = 0,$$

$$H''(t) = \delta^2 F(\Psi(t), u-u_0)$$

si ha

$$H(1) \underset{(*)}{\geq} H(0) + \frac{\lambda}{2}\left(\int_a^b [(u-u_0)^2 + (u'-u_0')^2]\,dx\right)\left(\int_0^1 (1-t)\,dt\right)$$

$$= H(0) + \frac{\lambda}{4}\int_a^b [(u-u_0)^2 + (u'-u_0')^2]\,dx$$

ossia

$$F(u) \geq F(u_0) \qquad \forall u \in X \text{ t.c. } \|u-u_0\|_{\mathcal{C}^1} < r$$

con la disuguaglianza stretta se $u \neq u_0$. $\square$

OSS. Come ci si può aspettare, la condizione sopra sulla $\delta^2 F$ non è sufficiente per avere un punto di minimo relativo forte.

Basta prendere il funzionale dell'esempio 2 (Scheeffer) a pag. 101 che soddisfa la stima dal basso per $\delta^2 F$ (vedi sotto), per cui $u_0 \equiv 0$ è un punto di minimo relativo debole ma non forte.

Abbiamo $F(u) = \int_0^1 [(u'(x))^2 + (u'(x))^3] dx$.

Allora
$$\delta F(u, v) = \int_0^1 [2u' + 3u'^2] v' dx$$
e
$$\delta^2 F(u, v) = \int_0^1 [2 + 6u'] v'^2 dx .$$

Allora $u_0 \equiv 0 \in X$ soddisfa $\delta F(u_0, v) = 0$ e $\delta^2 F(u_0, v) = 2\int_0^1 v'^2 dx$.

Notiamo ora che per $v \in \mathcal{C}^1([0,1])$ $v(0) = v(1) = 0$ si ha
$$v(x) = \int_0^x v'(t) dt \qquad \forall x \in [0,1]$$
e quindi
$$|v(x)| \le \int_0^x |v'(t)| \cdot 1 \, dt \underset{\text{disug. di Hölder ⊛}}{\le} \left(\int_0^x 1 \, dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^x |v'(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$$
per cui
$$|v(x)|^2 \le x \cdot \int_0^x |v'(t)|^2 dt \le \int_0^1 v'(t)^2 dt$$
e quindi
$$\int_0^1 v^2 dx \le \int_0^1 v'^2 dx \quad . \quad ⊛'$$

Allora $\delta^2 F(u_0, v) \ge \int_0^1 (v^2 + v'^2) dx \quad \forall v \in \mathcal{C}^1([a,b])$, $v(a) = v(b) = 0$. □

⊛ disuguaglianza di Hölder: se $u \in L^p$, $v \in L^{p'}$, $1 \le p \le +\infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, allora $uv \in L^1$ e $\int_a^b |uv| dx \le \left(\int_a^b |u|^p dx\right)^{1/p} \left(\int_a^b |v|^{p'} dx\right)^{1/p'}$

⊛' disuguaglianza di Poincaré: $u \in W_0^{1,p}$, $1 \le p \le +\infty$, allora $\|u\|_{L^p} \le (b-a) \| u' \|_{L^p}$

→ se $p = p' = 2$, allora si ha la disug. di Cauchy-Schwarz