

Indice

Introduzione

	pag.
- Ottimizzazione in $\mathbb{R}^n$ (A)	1
- Brevi commenti storici (B)	9
- Esempi di modellizzazione mediante funzionali integrali (C)	12
- Metodi indiretti classici e metodi diretti (D)	18
- Nota sull'esistenza di minimi ($\frac{1}{2}$): esempio di Weierstrass e altri $\left(F(u) = \int_{-1}^1 x^2 (u'(x))^2 dx ; F(u) = \int_0^1 \frac{1}{1+(u'(x))^2} dx \right)$.	20

Verso i metodi indiretti (classici)

- Variazione prima ; variazione seconda	24
Esercizi $\delta F(u, v)$	25
- Qualche risultato preliminare :	
• derivazione sotto il segno di integrale	28
• Lemma fondamentale del Calcolo delle Variazioni	29
• Funzioni convesse	30

Metodi indiretti (classici)

- Eq. di Eulero-Lagrange in forma debole (EED)	34
- Eq. di Eulero-Lagrange (EE)	34
- Estremale debole di F ; Estremale di F	35
- Regolarità di estremali deboli e minimizzanti $\left(F(u) = \int_{-1}^1 u^2 (2x - u'(x))^2 dx \right)$	36
Paradosso di Eulero $\left(F(u) = \int_0^1 [(u'(x))^2 - 1]^2 dx \right)$	38
- Funzione lagrangiana convessa ed estremali (deboli) di F	40
- Eq. di Eulero-Lagrange (EE')	43
- Integrale primo di F per funz. lagrangiana indep. da x	44
- Estremali di F nel caso $f(x, u, \xi) = f(\xi)$	
• f convesso (curva di minima lunghezza)	45

- f non convessa

46

Paradosso di Eulero;

$$F(u) = \int_0^1 e^{-(u'(x))^2} dx \quad \text{su } X = \{u \in C^1([0,1]) : u(0) = u(1) = 0\}.$$

- Estremali di F nel caso $f(x, u, \xi) = f(x, \xi)$

47

Esempio di Weierstrass

- Estremali di F nel caso $f(x, u, \xi) = f(u, \xi)$

49

- f convessa

$$F(u) = \int_{-1}^1 \left[\frac{k}{2} (u'(x))^2 + g u(x) \right] dx ; \text{ corda elastica} \quad 49$$

Interpretazione fisica di (EE) e dell'integrale primo

50

$$\Phi(u, u') = c \quad (\text{funz. lagrangiana non nec. convessa})$$

- f non convessa

$$F_\lambda(u) = \int_0^\pi [(u'(x))^2 - \lambda^2 u(x)] dx, \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad 52$$

Disuguaglianza di Poincaré - Wirtinger

53

Equivalenza tra l'eq. di Eulero-Lagrange (EE) e $\Phi(u, u') = \text{cost}$

54

- Brachistocrona. Cicloide.

55

Estremali soddisfacenti le condizioni al contorno

58

Tempo minimo di percorrenza. Confronto con la retta e

la semicirconferenza.

59

Tautocronia della cicloide

62

- Superficie di rivoluzione d'area minima

62

Catenaria. Catenoide. Esistenza di estremali

63

soddisfacenti i dati sul bordo.

- Estremali di F nel caso $f(x, u, \xi)$

- f convessa

64

$$F(u) = \int_0^1 \left[\frac{1}{2} (u'(x))^2 + g(x) u(x) \right] dx \quad 64$$

Funzionali convessi: def., caratterizzazione; funzionali integrali convessi (qualche definizione, precisazione!)

66

- Problemi variazionali con condizioni miste:	69
Moltiplicatori di Lagrange (eq. di Eulero-Lagrange per $\tilde{F} \equiv F + \lambda G$, con G funzionale del vincolo)	70
$(F(u) = \int_0^1 (u'(x))^2 dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = u(1) = 0\}$ con vincolo isoperimetrico $G(u) = \int_0^1 u(x) dx = 1$;	72
Il problema della catenaria (il filo pesante)	74
Il problema di Didone).	78
Il problema di Didone (usando il teorema di Green nel piano e la disuguaglianza di Poincaré - Wirtinger).	81
La disuguaglianza isoperimetrica (usando il teorema di Green nel piano e la disuguaglianza di Poincaré - Wirtinger generalizzata).	85
- Eq. di Eulero - Lagrange in forma integrale	
Lemma di Du Bois - Raymond	87
Eq. di Eulero - Lagrange per f e u di classe $\mathcal{C}^1$	89
Eq. di Eulero - Lagrange in forma integrale	90
Estremali spezzati	90
1 ^a e 2 ^a condizione di Erdmann (per i punti angolosi)	91
Applicazioni: $F(u) = \int_0^1 [(u'(x))^2 - 1] dx$ su $Y = \{u \in \mathcal{C}_{\text{tratt}}^1([0,1]) : u(0) = u(1) = 0\}$	93
$F(u) = \int_{-1}^1 u^2(x) (1 - u'(x))^2 dx$ su $Y = \{u \in \mathcal{C}_{\text{tratt}}^1([-1,1]) : u(-1) = 0, u(1) = 1\}$	95
- Minimi relativi (locali) deboli e forti	98
Definizione: punto di minimo relativo debole (risp. forte)	99
Es. 1: punto di minimo relativo debole $\neq$ punto di minimo relativo forte	100
Esempio di Scheeffer	101
Variazione seconda e condizioni suff. affinché un estremo debole sia un punto di minimo relativo debole	103
$\delta^2 F(u_0, v) > 0$ non è in generale sufficiente affinché un estremo	

debole sia un punto di minimo relativo debole (Es. di Scheeffer)	104
Dimostrazione della Proposizione a pag. 103	105
Le cond. su $S^2 F$ sono suff. affinché un estremo debole sia un punto di minimo relativo debole, ma non forte	107
Lagrangiana accessoria. Integrale accessorio	108
Cond. nec. di Legendre per minimi relativi deboli	108
$(F(u) = \int_0^1 [3u^4 - 20u^3 + 36u^2] dx$ su $X = \{u \in C^1([0,1]); u(0)=0, u(1)=1\}$	110
Funzione di eccesso di Weierstrass	
Cond. nec. di Weierstrass per minimi relativi forti (senza dim.)	111
Teoria di Jacobi e minimizzanti deboli	114
Eq. di Jacobi. Campi di Jacobi	114
Lemma di Legendre	115
Lemma di Jacobi	116
Cond. sufficiente per minimi relativi deboli espressa mediante i campi di Jacobi	117
Cond. nec. di Jacobi	119
Campi di Jacobi e punti coniugati	119
Cond. nec. e suff. per minimi relativi deboli esprese mediante i punti coniugati (senza dim.)	120
$(F(u) = \int_0^6 [u^2 - u^2] dx$ su $X = \{u \in C^1([0,6]); u(0)=u(6)=0; \text{ studio della natura dell'estremale } u_0 \equiv 0 \text{ su } [0,6]\}$	122
Teoria dei campi di Weierstrass e minimizzanti forti	124
Campo di estremali (rispetto alla lagrangiana f)	124
Funzione pendente	125
Esempi di campi estremali; pendente	125
Equazione di Eulero per il campo	126

Equazioni di Carathéodory, Integrale invariante di Hilbert 128

Cond. sufficiente per minimi assoluti mediante i campi di estremali
e la funzione eccesso di Weierstrass 129

Cond. suff. per minimi relativi deboli (n.s.p. forti) mediante i campi
di estremali e la condizione di Legendre stretta (n.s.p. forte). 130

Cond. suff. per minimi relativi forti mediante i pt. coniugati e
un rafforzamento della cond. di Legendre forte 131

$F(u) = \int_0^1 u u'^2 dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0)=u(1)=1\}$; studio della natura
dell'estremale $u_0 \equiv 1 \in X$ 131

$F(u) = \int_0^1 [u'^2 - u^2] dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0)=u(1)=0\}$; studio della
natura dell'estremale $u_0 \equiv 0 \in X$ 133

$F(u) = \int_0^1 (u'^2 - 1)^2 dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0)=0, u(1)=k\}$; studio
della natura dell'estremale $u_0(x)=kx$ al variare di $k \in \mathbb{R}$ 134

Metodi diretti 138

Introduzione (A) metodi indiretti 138
(B) metodi diretti 140

Semicontinuità inferiore 143

Semicontinuità inferiore sequenziale 145

Caratterizzazioni della semicontinuità inferiore 145

Coercitività (coercitività) 147

Teorema di Tonelli (esistenza di punti di minimi) 147

Unicità dei pt. di minimo 149

Applicazioni: $F(u) = \int_0^1 u^2 dx - 2 \int_0^1 g u dx$ su $X = L^2(0,1)$, $g \in L^2(0,1)$ 151

Proprietà degli spazi L^p (vedi pag. 151-153)

$F(u) = \int_a^b [u'^2 + g u] dx$ 155

Funzioni assolutamente continue $AC([a,b])$ 158

Definizioni a confronto e proprietà 160

Un risultato di esistenza di un minimo per $F(u) = \int_a^b [u'(x)^2 + g(x)u(x)] dx$ su $H_0^1(a,b)$	161
Un risultato di esistenza di un minimo per $F(u) = \int_a^b [f(u') + g(x)u(x)] dx$ su $H_0^1(a,b)$	163
Derivata debole	164
Spazi di Sobolev $W^{1,p}(a,b)$	165
Confronto tra le classi di funzioni $AC([a,b])$ e $W^{1,1}(a,b)$	165
Teorema di compattezza debole in $W^{1,p}(a,b)$, $1 < p < +\infty$	167
Teorema di semicontinuità (seq.) di Tonelli	168
Teorema di esistenza di Tonelli	170
Applicazioni al funzionale di Weierstrass $F(u) = \int_{-1}^1 x^2 u'^2 dx$ in $X = \{u \in W^{1,2}(-1,1) : u(-1) = -1, u(1) = 1\}$.	171