COGNOME ______________________	NON SCRIVERE QUI
NOME ______________________	1 2 3 4 5
MATRICOLA ⌊ ⌊ ⌊ ⌊ ⌊ ⌊ ⌊	B

UNIVERSITÀ DI TRENTO — FACOLTÀ DI SCIENZE COGNITIVE

CDL IN SCIENZE E TECNICHE DI PSICOLOGIA COGNITIVA
CDL IN INTERFACCE E TECNOLOGIE DELLA COMUNICAZIONE
CDL IN FILOSOFIA

PRIMA PROVA INTERMEDIA DI ANALISI MATEMATICA (CON ELEMENTI DI ALGEBRA)

A.A. 2012-2013 — ROVERETO, 30 OTTOBRE 2012

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **DUE ORE E MEZZA**.
IL SUPERAMENTO DEI PRIMI 10 ESERCIZI È CONDIZIONE NECESSARIA PERCHÈ LA SECONDA PARTE DEL COMPITO VENGA VALUTATA. LE RISPOSTE DI QUESTE DEVONO ESSERE RIPORTATE SU QUESTO FOGLIO.
Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.
È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.
Potete usare solo il vostro materiale di scrittura e il vostro materiale di studio. Non usate il colore rosso.

---

a1) Siano dati gli insiemi $A =]-2,+\infty[$ e $B = [1,3] \cup \{4\}$. Determinate l'insieme $A \setminus B$.

Risposta:

$A \setminus B =]-2,1[\cup]3,4[\cup]4,+\infty[$.

a2) Sia $A = [-2,3] \cup \{4\}$. Dite quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali sono false:
(i) $\min A = -2$; (ii) $\{2,3\} \in \mathcal{P}(A)$; (iii) A è un intervallo; (iv) $4 \in A$.

Risposta:

i) V ii) V iii) F iv) V

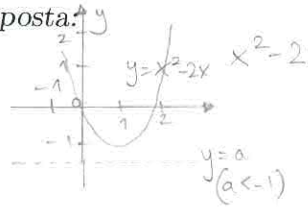
a3) Scrivete la negazione della seguente proposizione: " $\exists x \in \mathbb{Z} : \forall y \in \mathbb{N} ; x \leq y$".

Risposta:

" $\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{N} : x > y$ "

a4) Determinate tutti gli $a \in \mathbb{R}$ tali che l'equazione $x^2 - 2x = a$ non ha soluzione.

Risposta:



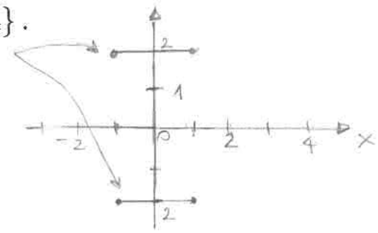
$(x-1)^2 - 1 = a$

$x^2 - 2x - a = 0 \iff x_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+4a}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{1+a}}{2}$

$1 + a < 0 \Rightarrow a \in]-\infty,-1[$

a5) Rappresentate graficamente $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq 1 , \quad y^2 = 4\}$.

Risposta:



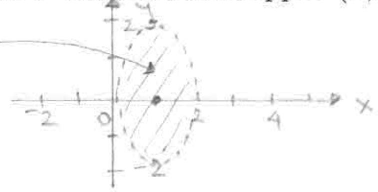
a6) Scrivete l'equazione della retta r di pendenza $m = 2$ e passante per il punto $P = (1, -2)$.

Risposta:

$y = -2 + 2(x-1) \Rightarrow \underline{\underline{y = 2x - 4}}$

a7) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano l'insieme delle coppie $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ soddisfacenti $4(x-1)^2 + y^2 < 4$.

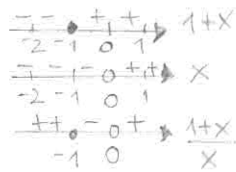
Risposta: $(x-1)^2 + \frac{y^2}{4} < 1$



a8) Risolvete la seguente disequazione $\dfrac{x-1}{x} \geq 2$.

Risposta:

$\frac{x-1-2x}{x} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{-1-x}{x} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{1+x}{x} \leq 0$



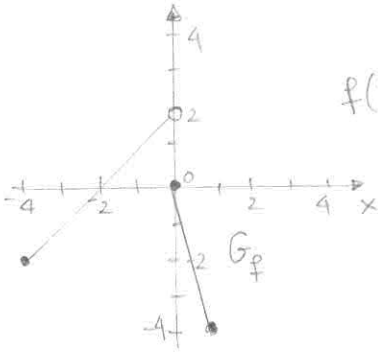
$\underline{\underline{S = [-1, 0[}}$

a9) Sia $f : [-4, 1] \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{se } -4 \leq x < 0 \\ -4x & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \, . \end{cases}$$

Determinate l'immagine di f .

Risposta:



$\underline{\underline{f([-4,1]) = [-4, 2[}}$.

a10) Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ le funzioni definite da

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{se } x < 0 \\ x^2 + 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases} \qquad g(x) = -x^3 + 1 \, .$$

Determinate $(f+g)(2)$ e $(fg)(-1)$.

Risposta:

$(f+g)(2) \doteq f(2) + g(2) = 5 + (-7) = \underline{\underline{-2}}$

$(fg)(-1) \doteq f(-1) \cdot g(-1) = (-1) \cdot (2) = \underline{\underline{-2}}$.

FILA (B)

b1) i)

$$-4x^2+y^2+8x+4y-4=0$$
$$-4(x^2-2x)+y^2+4y-4=0$$
$$-4(x-1)^2+\cancel{4}+(y+2)^2-\cancel{4}-4=0$$
$$-4(x-1)^2+(y+2)^2=4$$
$$-(x-1)^2+\frac{(y+2)^2}{4}=1 \qquad \underline{C=(1,-2)} \qquad a=1,\ b=2$$

ii) r : retta passante per $C=(1,-2)$ e $P=(3,0)$

$$\frac{y+2}{0+2}=\frac{x-1}{3-1} \iff y+2=x-1 \Rightarrow \underline{y=x-3}.$$

Questa retta non interseca mai l'iperbole in i) poiché il sistema

$$\begin{cases}-(x-1)^2+\frac{(y+2)^2}{4}=1\\ y=x-3\end{cases}$$

non ha soluzione. Infatti, sostituendo la 2^a eq. nella 1^a eq. si ha

$$-(x-1)^2+\frac{(x-1)^2}{4}=1, \text{ ossia } -\frac{3}{4}(x-1)^2=1,$$

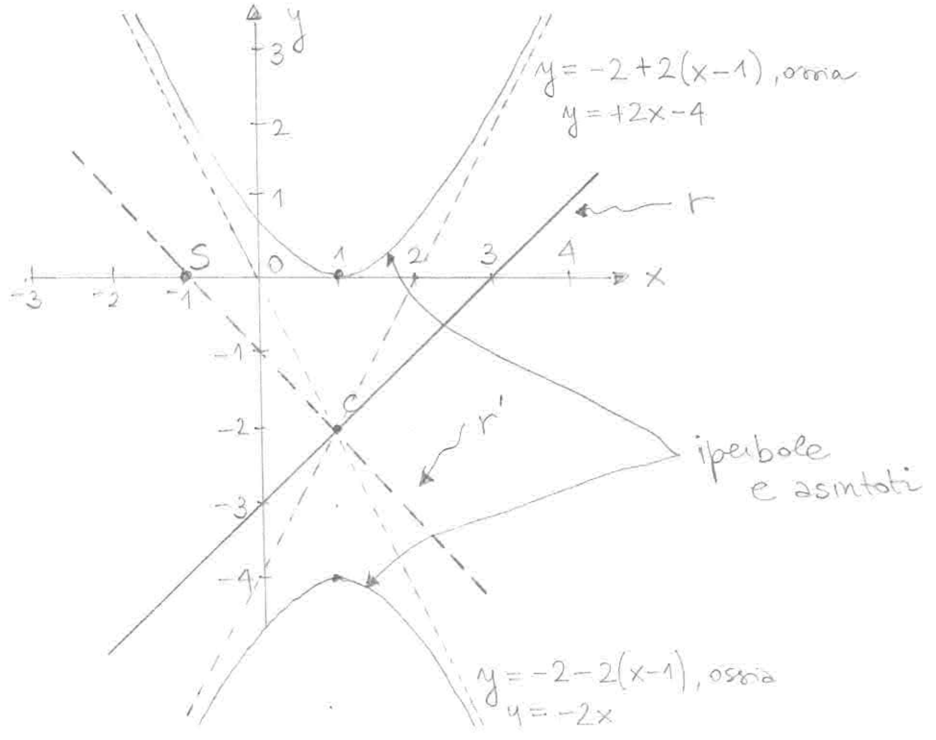
che non è possibile! (un numero ≤ 0 non può essere uguale ad 1).

iii) r' ha pendenza $m=-1$. L'eq. di r' diventa quindi

$$y=-2-(x-1), \text{ ossia } \underline{y=-x-1}.$$

Punto di intersezione di tale retta con l'asse delle x è $S=(-1,0)$.

iv)



b2) i)

$\mathcal{A}$:	V	V	F	F
$\mathcal{B}$:	V	F	V	F
$\mathcal{A} \circ \mathcal{B}$:	V	V	V	F
non $\mathcal{A}$:	F	F	V	V
non $\mathcal{B}$:	F	V	F	V
non $\mathcal{A}$ e non $\mathcal{B}$:	F	F	F	V
non(non $\mathcal{A}$ e non $\mathcal{B}$) :	V	V	V	F

Le due proposizioni sono equivalenti.

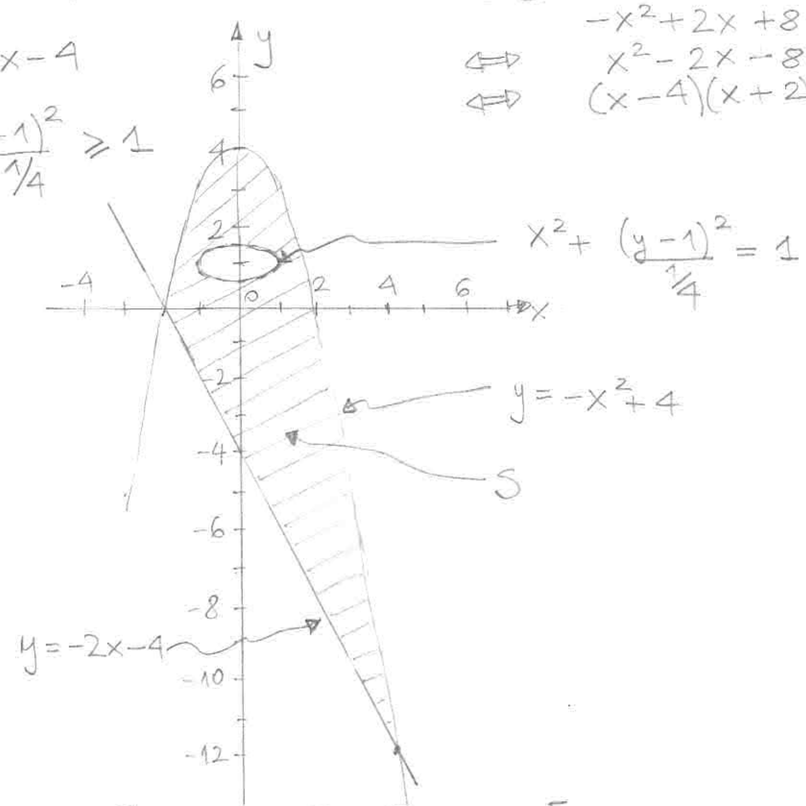
$\square$

ii) $\mathcal{A}(x,y)$ = "Nell'anno accademico x lo studente y del CdL in STPC supera l'esame di Analisi Matematica con il voto 30/30 e lode".

La proposizione data si scrive quindi: " $\forall x, \exists y : \mathcal{A}(x,y)$ ".

b3) i)
$$\begin{cases} y \le -x^2+4 \\ y \ge -2x-4 \\ x^2 + \dfrac{(y-1)^2}{1/4} \ge 1 \end{cases}$$

Osserviamo che $-x^2+4 = -2x-4 \iff -x^2+2x+8=0 \iff x^2-2x-8=0 \iff (x-4)(x+2)=0$ $\quad x_1=-2$, $x_2=4$

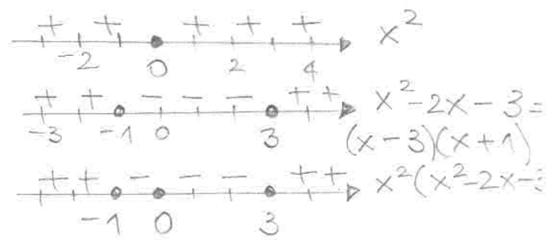


$\square$

ii) $y = k$ con $k \in \left]-\infty, -12\right[\cup \left]4, +\infty\right[$.

b4) i) $A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \dfrac{x^2(x^2-2x-3)}{x^2+1} \ge 0 \right\}$

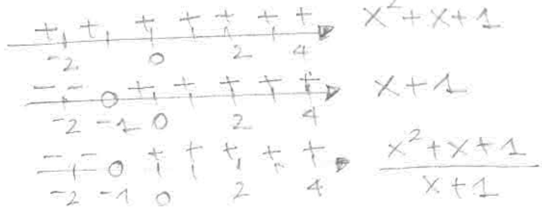
Oss. $x^2+1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

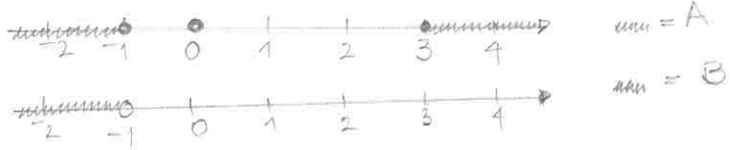


$A = \left]-\infty, -1\right] \cup \{0\} \cup \left[3, +\infty\right[$.

$B = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{1}{x+1} + x < 0 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x^2+x+1}{x+1} < 0 \right\}$

$=]-\infty, -1[\,.$





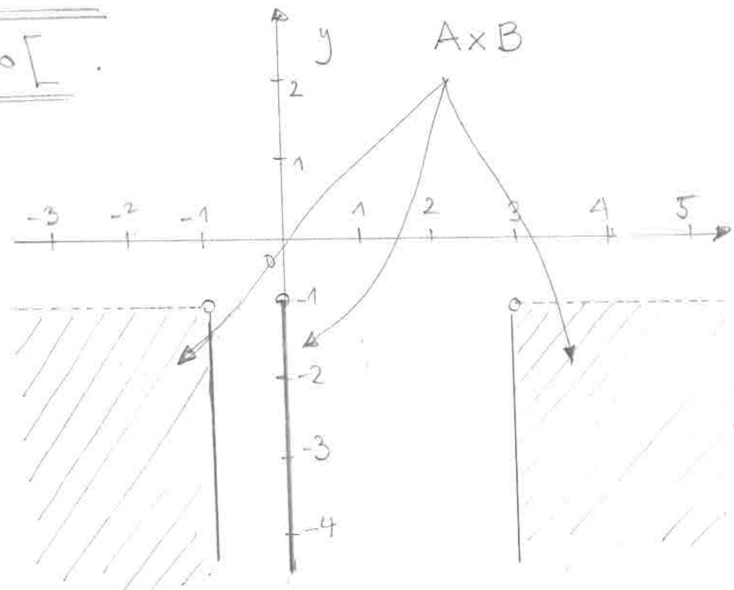
A non è limitato (non è limitato inferiormente, non è limitato superiormente)

B non è limitato (è limitato superiormente, ma non è limitato inferiormente)

ii) $A \cap B =]-\infty, -1[$ ⇒ A e B non sono disgiunti.

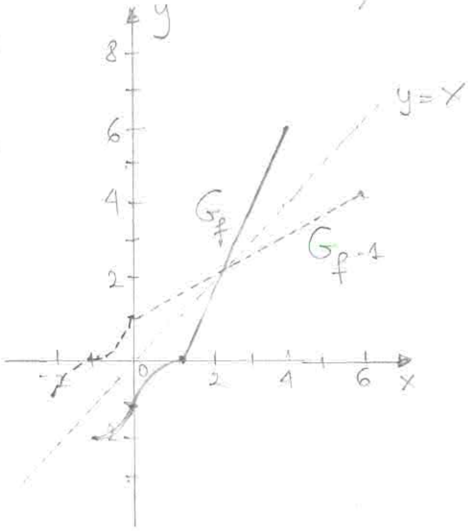
$\mathbb{R} \setminus B = [-1, +\infty[\,.$

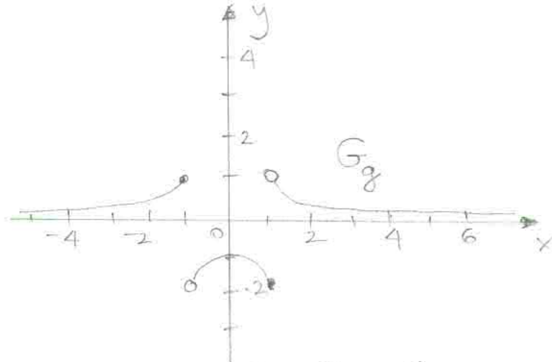
iii)



b5) i)

ii)





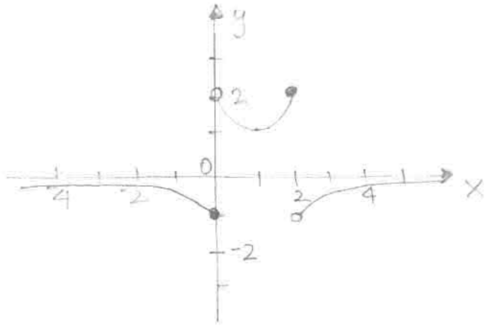
iii) $g(\mathbb{R}) = [-2, -1] \cup]0, 1]\,.$

g non è suriettiva, poiché

$g(\mathbb{R}) \subsetneq [-2, 1]\,.$

iv) g non è iniettiva; infatti ogni retta orizzontale $y=k$ con $-2<k<-1$ (oppure $0<k<1$) interseca il grafico di g in due punti; quindi $\exists$ sono $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ con $x_1 \neq x_2$ e $g(x_1)=g(x_2)$ ☐

v) $\underset{\mathbb{R}}{\overset{\cap}{x}} \longmapsto -g(x-1)$



☐

vi) $\min g = \underline{\underline{-2}}$ $\qquad$ $\underline{\underline{x=1 \text{ pt. di minimo}}}$

$\max g = \underline{\underline{1}}$ $\qquad$ $\underline{\underline{x=-1 \text{ pt. di massimo.}}}$ ☐

vii) $(f\circ g)(-1) = f(g(-1)) = f(1) = \underline{\underline{0.}}$ ■