

COGNOME _____ NOME _____ MATRICOLA <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center; width: 100px;"> <tr> <td style="width: 15px; height: 15px;"></td> <td style="width: 15px; height: 15px;"></td> <td style="width: 15px; height: 15px;"></td> <td style="width: 15px; height: 15px;"></td> <td style="width: 15px; height: 15px;"></td> <td style="width: 15px; height: 15px;"></td> </tr> </table>							<div style="text-align: center; margin-bottom: 10px;">NON SCRIVERE QUI</div> <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center; width: 100px;"> <tr> <td style="width: 15px; height: 15px;"></td> <td style="width: 15px; height: 15px;"></td> <td style="width: 15px; height: 15px;"></td> <td style="width: 15px; height: 15px;"></td> <td style="width: 15px; height: 15px;"></td> <td style="width: 15px; height: 15px;"></td> </tr> </table> <div style="float: right; text-align: center; margin-top: 20px;"> <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100px; height: 100px;"> <tr> <td style="font-size: 2em; vertical-align: middle;">A</td> </tr> </table> </div>							A
A														

UNIVERSITÀ DI TRENTO — FACOLTÀ DI SCIENZE COGNITIVE

CdL IN SCIENZE E TECNICHE DI PSICOLOGIA COGNITIVA  
 CdL IN INTERFACCE E TECNOLOGIE DELLA COMUNICAZIONE  
 CdL IN FILOSOFIA

PRIMA PROVA INTERMEDIA DI ANALISI MATEMATICA (CON ELEMENTI DI ALGEBRA)

A.A. 2012-2013 — ROVERETO, 30 OTTOBRE 2012

---

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **DUE ORE E MEZZA**.

**IL SUPERAMENTO DEI PRIMI 10 ESERCIZI È CONDIZIONE NECESSARIA PERCHÈ LA SECONDA PARTE DEL COMPITO VENGA VALUTATA. LE RISPOSTE DI QUESTE DEVONO ESSERE RIPORTATE SU QUESTO FOGLIO.**

Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.

È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.

Potete usare solo il vostro materiale di scrittura e il vostro materiale di studio. Non usate il colore rosso.

---

a1) Siano dati gli insiemi  $A = ] - \infty, 2[$  e  $B = \{-3\} \cup [1, 4]$ . Determinate l'insieme  $A \setminus B$ .

*Risposta:*

---

a2) Sia  $A = ] - 2, 4[ \cup \{5\}$ . Dite quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali sono false:

(i)  $\min A = -2$ ; (ii)  $\{3\} \in \mathcal{P}(A)$ ; (iii)  $A$  è un intervallo; (iv)  $A$  è limitato.

*Risposta:*

---

a3) Scrivete la negazione della seguente proposizione: " $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{Z} : x + y = 0$ ".

*Risposta:*

---

a4) Determinate tutti gli  $a \in \mathbb{R}$  tali che l'equazione  $x^2 - 2x = a$  ha almeno una soluzione.

*Risposta:*

---

a5) Rappresentate graficamente  $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 = 4, y^2 \leq 1\}$ .

---

*Risposta:*

---

a6) Scrivete l'equazione della retta  $r$  di pendenza  $m = -2$  e passante per il punto  $P = (-1, 2)$ .

---

*Risposta:*

---

a7) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano l'insieme delle coppie  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  soddisfacenti  $x^2 + 4(y - 1)^2 > 4$ .

---

*Risposta:*

---

a8) Risolvete la seguente disequazione  $\frac{x+1}{x} < 2$ .

---

*Risposta:*

---

a9) Sia  $f : [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} -2x & \text{se } -1 \leq x < 0 \\ x+1 & \text{se } 0 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Determinate l'immagine di  $f$ .

---

*Risposta:*

---

a10) Siano  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  le funzioni definite da

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{1}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases} \quad g(x) = x^3 + 1.$$

Determinate  $(f+g)(1)$  e  $(fg)(-2)$ .

---

*Risposta:*

---

b1) i) Siano  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  due proposizioni. Provate che la proposizione " $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$ " è equivalente alla proposizione " $\text{non}(\text{non}\mathcal{A} \text{ o } \text{non}\mathcal{B})$ ".

ii) Scrivete in matematica (individuando un opportuno predicato) la seguente proposizione: "Ogni settimana c'è almeno uno studente del CdL in STPC che consegna la verifica settimanale in ritardo."

---

b2) i) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano l'insieme  $S$  delle coppie  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  soddisfacenti il seguente sistema di disequazioni

$$\begin{cases} y - x^2 + 4 \geq 0 \\ y + 2x - 4 \leq 0 \\ 4x^2 + (y - 2)^2 > 1. \end{cases}$$

ii) Determinate l'equazione delle rette orizzontali che non intersecano mai l'insieme  $S$ .

---

b3) i) Determinate il centro  $C$  dell'iperbole di equazione

$$x^2 - 4y^2 - 2x - 16y - 19 = 0.$$

ii) Scrivete l'equazione della retta  $r$  passante per  $C$  e per l'origine  $O = (0, 0)$ . Provate che  $r$  non interseca mai l'iperbole.

iii) Scrivete l'equazione della retta  $r'$  perpendicolare alla retta  $r$  e passante per  $C$  e determinate il suo punto d'intersezione  $S$  con l'asse delle ascisse.

iv) Rappresentate graficamente  $r$ ,  $r'$  e l'iperbole nello stesso sistema di riferimento.

---

b4) Siano dati gli insiemi  $A$  e  $B$  definiti da

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x^2(x^2 - x - 6)}{-x^2 - 1} > 0 \right\}, \quad B = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{1}{x - 2} \geq -x \right\}.$$

i) Determinate  $A$  e  $B$  e rappresentateli sulla retta reale. Dite se sono insiemi limitati.

ii) Determinate gli insiemi  $A \cap B$  e  $\mathbb{R} \setminus B$ . Dite se  $A$  e  $B$  sono insiemi disgiunti.

iii) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano l'insieme  $A \times B$ .

---

b5) Siano  $f : ]-1, 2] \rightarrow [-7, 2[$  e  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  le funzioni definite da

$$f(x) = -x^3 + 1 \quad g(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} + 1 & \text{se } x \leq -1 \\ x^4 & \text{se } -1 < x < 1 \\ \frac{1}{x^4} & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

i) Rappresentate graficamente  $f$  e  $g$ .

ii) Rappresentate graficamente la funzione inversa  $f^{-1} : [-7, 2[ \rightarrow ]-1, 2]$ .

iii) Determinate  $g(\mathbb{R})$ . La funzione  $g$  è suriettiva?

iv) Dite, motivando la risposta, se  $g$  è iniettiva.

v) Rappresentate graficamente nel suo dominio la funzione  $x \mapsto -g(x + 1)$ .

vi) Determinate, se esistono, il massimo e il minimo e i punti di massimo e i punti di minimo della funzione  $g$  su  $\mathbb{R}$ .

vii) Determinate  $(f \circ g)(-1)$ .

---

COGNOME _____ NOME _____ MATRICOLA <table style="display: inline-table; border: 1px solid black; text-align: center; width: 100px;"> <tr> <td style="width: 15px; height: 15px;"></td> <td style="width: 15px; height: 15px;"></td> <td style="width: 15px; height: 15px;"></td> <td style="width: 15px; height: 15px;"></td> <td style="width: 15px; height: 15px;"></td> <td style="width: 15px; height: 15px;"></td> </tr> </table>							<div style="text-align: center; margin-bottom: 10px;">NON SCRIVERE QUI</div> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 50%; text-align: center;"> <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">1</td> <td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">2</td> <td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">3</td> <td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">4</td> <td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">5</td> </tr> </table> </td> <td style="width: 50%; text-align: center; vertical-align: middle;"> <div style="border: 1px solid black; width: 100px; height: 100px; display: flex; align-items: center; justify-content: center; margin: 0 auto;"> <div style="border: 1px solid black; width: 40px; height: 40px; display: flex; align-items: center; justify-content: center;">B</div> </div> </td> </tr> </table>	<table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">1</td> <td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">2</td> <td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">3</td> <td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">4</td> <td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">5</td> </tr> </table>	1	2	3	4	5	<div style="border: 1px solid black; width: 100px; height: 100px; display: flex; align-items: center; justify-content: center; margin: 0 auto;"> <div style="border: 1px solid black; width: 40px; height: 40px; display: flex; align-items: center; justify-content: center;">B</div> </div>
<table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">1</td> <td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">2</td> <td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">3</td> <td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">4</td> <td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">5</td> </tr> </table>	1	2	3	4	5	<div style="border: 1px solid black; width: 100px; height: 100px; display: flex; align-items: center; justify-content: center; margin: 0 auto;"> <div style="border: 1px solid black; width: 40px; height: 40px; display: flex; align-items: center; justify-content: center;">B</div> </div>								
1	2	3	4	5										

UNIVERSITÀ DI TRENTO — FACOLTÀ DI SCIENZE COGNITIVE

CdL IN SCIENZE E TECNICHE DI PSICOLOGIA COGNITIVA  
 CdL IN INTERFACCE E TECNOLOGIE DELLA COMUNICAZIONE  
 CdL IN FILOSOFIA

PRIMA PROVA INTERMEDIA DI ANALISI MATEMATICA (CON ELEMENTI DI ALGEBRA)

A.A. 2012-2013 — ROVERETO, 30 OTTOBRE 2012

---

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **DUE ORE E MEZZA**.

**IL SUPERAMENTO DEI PRIMI 10 ESERCIZI È CONDIZIONE NECESSARIA PERCHÈ LA SECONDA PARTE DEL COMPITO VENGA VALUTATA. LE RISPOSTE DI QUESTE DEVONO ESSERE RIPORTATE SU QUESTO FOGLIO.**

Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.

È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.

Potete usare solo il vostro materiale di scrittura e il vostro materiale di studio. Non usate il colore rosso.

---

a1) Siano dati gli insiemi  $A = ] - 2, +\infty[$  e  $B = [1, 3] \cup \{4\}$ . Determinate l'insieme  $A \setminus B$ .

*Risposta:*

---

a2) Sia  $A = [-2, 3] \cup \{4\}$ . Dite quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali sono false:

(i)  $\min A = -2$ ;   (ii)  $\{2, 3\} \in \mathcal{P}(A)$ ;   (iii)  $A$  è un intervallo;   (iv)  $4 \in A$ .

*Risposta:*

---

a3) Scrivete la negazione della seguente proposizione: " $\exists x \in \mathbb{Z} : \forall y \in \mathbb{N}, x \leq y$ ".

*Risposta:*

---

a4) Determinate tutti gli  $a \in \mathbb{R}$  tali che l'equazione  $x^2 - 2x = a$  non ha soluzione.

*Risposta:*

---

a5) Rappresentate graficamente  $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq 1, y^2 = 4\}$ .

*Risposta:*

---

a6) Scrivete l'equazione della retta  $r$  di pendenza  $m = 2$  e passante per il punto  $P = (1, -2)$ .

*Risposta:*

---

a7) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano l'insieme delle coppie  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  soddisfacenti  $4(x - 1)^2 + y^2 < 4$ .

*Risposta:*

---

a8) Risolvete la seguente disequazione  $\frac{x-1}{x} \geq 2$ .

*Risposta:*

---

a9) Sia  $f : [-4, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{se } -4 \leq x < 0 \\ -4x & \text{se } 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Determinate l'immagine di  $f$ .

*Risposta:*

---

a10) Siano  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  le funzioni definite da

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x < 0 \\ x^2 + 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases} \quad g(x) = -x^3 + 1.$$

Determinate  $(f + g)(2)$  e  $(fg)(-1)$ .

*Risposta:*

---

b1) i) Determinate il centro  $C$  dell'iperbole di equazione

$$-4x^2 + y^2 + 8x + 4y - 4 = 0.$$

ii) Scrivete l'equazione della retta  $r$  passante per  $C$  e per il punto  $P = (3, 0)$ . Provate che  $r$  non interseca mai l'iperbole.

iii) Scrivete l'equazione della retta  $r'$  perpendicolare alla retta  $r$  e passante per  $C$  e determinate il suo punto d'intersezione  $S$  con l'asse delle ascisse.

iv) Rappresentate graficamente  $r$ ,  $r'$  e l'iperbole nello stesso sistema di riferimento.

---

b2) i) Siano  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  due proposizioni. Provate che la proposizione " $\mathcal{A} \text{ o } \mathcal{B}$ " è equivalente alla proposizione "**non**(**non** $\mathcal{A}$  e **non** $\mathcal{B}$ )".

ii) Scrivete in matematica (individuando un opportuno predicato) la seguente proposizione: "Ogni anno accademico c'è almeno uno studente del CdL in STPC che supera l'esame di Analisi Matematica con il voto 30/30 e lode."

---

b3) i) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano l'insieme  $S$  delle coppie  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  soddisfacenti il seguente sistema di disequazioni

$$\begin{cases} y + x^2 - 4 \leq 0 \\ y + 2x + 4 \geq 0 \\ x^2 + 4(y - 1)^2 \geq 1. \end{cases}$$

ii) Determinate l'equazione delle rette orizzontali che non intersecano mai l'insieme  $S$ .

---

b4) Siano dati gli insiemi  $A$  e  $B$  definiti da

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x^2(x^2 - 2x - 3)}{-x^2 - 1} \leq 0 \right\}, \quad B = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{1}{x+1} < -x \right\}.$$

i) Determinate  $A$  e  $B$  e rappresentateli sulla retta reale. Dite se sono insiemi limitati.

ii) Determinate gli insiemi  $A \cap B$  e  $\mathbb{R} \setminus B$ . Dite se  $A$  e  $B$  sono insiemi disgiunti.

iii) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano l'insieme  $A \times B$ .

---

b5) Siano  $f : [-1, 4] \rightarrow [-2, 6]$  e  $g : \mathbb{R} \rightarrow [-2, 1]$  le funzioni definite da

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} - 1 & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ 2x - 2 & \text{se } 1 < x \leq 4 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} & \text{se } x \leq -1 \\ -x^4 - 1 & \text{se } -1 < x \leq 1 \\ \frac{1}{x^2} & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

i) Rappresentate graficamente  $f$  e  $g$ .

ii) Rappresentate graficamente la funzione inversa  $f^{-1} : [-2, 6] \rightarrow [-1, 4]$ .

iii) Determinate  $g(\mathbb{R})$ . La funzione  $g$  è suriettiva?

iv) Dite, motivando la risposta, se  $g$  è iniettiva.

v) Rappresentate graficamente nel suo dominio la funzione  $x \mapsto -g(x - 1)$ .

vi) Determinate, se esistono, il massimo e il minimo e i punti di massimo e i punti di minimo della funzione  $g$  su  $\mathbb{R}$ .

vii) Determinate  $(f \circ g)(-1)$ .

---

COGNOME _____ NOME _____ MATRICOLA <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center; width: 100px;"> <tr> <td style="width: 15px; height: 15px;"></td> <td style="width: 15px; height: 15px;"></td> <td style="width: 15px; height: 15px;"></td> <td style="width: 15px; height: 15px;"></td> <td style="width: 15px; height: 15px;"></td> <td style="width: 15px; height: 15px;"></td> </tr> </table>							<div style="text-align: center; margin-bottom: 10px;">NON SCRIVERE QUI</div> <table style="width: 100%;"> <tr> <td style="width: 60%; text-align: center;"> <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center; width: 150px;"> <tr> <td style="width: 20px; height: 20px;">1</td> <td style="width: 20px; height: 20px;">2</td> <td style="width: 20px; height: 20px;">3</td> <td style="width: 20px; height: 20px;">4</td> <td style="width: 20px; height: 20px;">5</td> </tr> </table> </td> <td style="width: 40%; text-align: center; vertical-align: middle;"> <div style="border: 1px solid black; width: 100px; height: 100px; display: flex; align-items: center; justify-content: center; margin: 0 auto;">C</div> </td> </tr> </table>	<table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center; width: 150px;"> <tr> <td style="width: 20px; height: 20px;">1</td> <td style="width: 20px; height: 20px;">2</td> <td style="width: 20px; height: 20px;">3</td> <td style="width: 20px; height: 20px;">4</td> <td style="width: 20px; height: 20px;">5</td> </tr> </table>	1	2	3	4	5	<div style="border: 1px solid black; width: 100px; height: 100px; display: flex; align-items: center; justify-content: center; margin: 0 auto;">C</div>
<table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center; width: 150px;"> <tr> <td style="width: 20px; height: 20px;">1</td> <td style="width: 20px; height: 20px;">2</td> <td style="width: 20px; height: 20px;">3</td> <td style="width: 20px; height: 20px;">4</td> <td style="width: 20px; height: 20px;">5</td> </tr> </table>	1	2	3	4	5	<div style="border: 1px solid black; width: 100px; height: 100px; display: flex; align-items: center; justify-content: center; margin: 0 auto;">C</div>								
1	2	3	4	5										

UNIVERSITÀ DI TRENTO — FACOLTÀ DI SCIENZE COGNITIVE

CdL IN SCIENZE E TECNICHE DI PSICOLOGIA COGNITIVA  
 CdL IN INTERFACCE E TECNOLOGIE DELLA COMUNICAZIONE  
 CdL IN FILOSOFIA

PRIMA PROVA INTERMEDIA DI ANALISI MATEMATICA (CON ELEMENTI DI ALGEBRA)

A.A. 2012-2013 — ROVERETO, 30 OTTOBRE 2012

---

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **DUE ORE E MEZZA**.

**IL SUPERAMENTO DEI PRIMI 10 ESERCIZI È CONDIZIONE NECESSARIA PERCHÈ LA SECONDA PARTE DEL COMPITO VENGA VALUTATA. LE RISPOSTE DI QUESTE DEVONO ESSERE RIPORTATE SU QUESTO FOGLIO.**

Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.

È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.

Potete usare solo il vostro materiale di scrittura e il vostro materiale di studio. Non usate il colore rosso.

---

a1) Siano dati gli insiemi  $A = ] - \infty, 3[$  e  $B = \{-2\} \cup [2, 4]$ . Determinate l'insieme  $A \setminus B$ .

*Risposta:*

---

a2) Sia  $A = ] - 3, 4] \cup \{5\}$ . Dite quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali sono false:

(i)  $\min A = -3$ ; (ii)  $\{2, 3\} \in \mathcal{P}(A)$ ; (iii)  $A$  non è un intervallo; (iv)  $A$  è limitato.

*Risposta:*

---

a3) Scrivete la negazione della seguente proposizione: " $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{Z} : x - y = 0$ ".

*Risposta:*

---

a4) Determinate  $a \in \mathbb{R}$  tale che l'equazione  $x^2 - 3x = a$  ha una ed una sola soluzione.

*Risposta:*

---

a5) Rappresentate graficamente  $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq 4, y^2 = 1\}$ .

*Risposta:*

---

a6) Scrivete l'equazione della retta  $r$  di pendenza  $m = 2$  e passante per il punto  $P = (-1, 2)$ .

*Risposta:*

---

a7) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano l'insieme delle coppie  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  soddisfacenti  $9(x - 2)^2 + y^2 \leq 9$ .

*Risposta:*

---

a8) Risolvete la seguente disequazione  $\frac{x-1}{x} \geq 3$ .

*Risposta:*

---

a9) Sia  $f : [-3, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} 4x + 1 & \text{se } -3 \leq x < 0 \\ -3x & \text{se } 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Determinate l'immagine di  $f$ .

*Risposta:*

---

a10) Siano  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  le funzioni definite da

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} & \text{se } x < 0 \\ 2x^2 & \text{se } x \geq 0 \end{cases} \quad g(x) = x^2 - 1.$$

Determinate  $(f + g)(-1)$  e  $(fg)(2)$ .

*Risposta:*

---



- b1) i) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano l'insieme  $S$  delle coppie  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  soddisfacenti il seguente sistema di disequazioni

$$\begin{cases} y + x^2 - 4 < 0 \\ y - 2x + 4 \geq 0 \\ x^2 + 9(y + 1)^2 \geq 1. \end{cases}$$

- ii) Determinate l'equazione delle rette orizzontali che non intersecano mai l'insieme  $S$ .

- 
- b2) Siano dati gli insiemi  $A$  e  $B$  definiti da

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \frac{x^2(x^2 + 2x - 3)}{-x^2 - 1} \geq 0\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{x+2} < -x\}.$$

- i) Determinate  $A$  e  $B$  e rappresentateli sulla retta reale. Dite se sono insiemi limitati.  
ii) Determinate gli insiemi  $A \cap B$  e  $\mathbb{R} \setminus B$ . Dite se  $A$  e  $B$  sono insiemi disgiunti.  
iii) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano l'insieme  $A \times B$ .

- 
- b3) i) Siano  $\mathcal{P}$  e  $\mathcal{Q}$  due proposizioni. Provate che la proposizione " $\mathcal{P} \text{ o } \mathcal{Q}$ " è equivalente alla proposizione "**non**(**non** $\mathcal{P}$  e **non** $\mathcal{Q}$ )".

- ii) Scrivete in matematica (individuando un opportuno predicato) la seguente proposizione: "C'è almeno uno studente del CdL in STPC che consegna tutte le verifiche settimanali via e-mail."

- 
- b4) i) Determinate il centro  $C$  dell'iperbole di equazione

$$-4x^2 + y^2 - 8x - 4y - 4 = 0.$$

- ii) Scrivete l'equazione della retta  $r$  passante per  $C$  e per il punto  $P = (-3, 0)$ . Provate che  $r$  non interseca mai l'iperbole.  
iii) Scrivete l'equazione della retta  $r'$  perpendicolare alla retta  $r$  e passante per  $C$  e determinate il suo punto d'intersezione  $S$  con l'asse delle ascisse.  
iv) Rappresentate graficamente  $r$ ,  $r'$  e l'iperbole nello stesso sistema di riferimento.

- 
- b5) Siano  $f : [-1, 4] \rightarrow [-2, 1]$  e  $g : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$  le funzioni definite da

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} - 1 & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{3}x - \frac{1}{3} & \text{se } 1 < x \leq 4 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x \leq -1 \\ x^4 & \text{se } -1 < x \leq 1 \\ 0 & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

- i) Rappresentate graficamente  $f$  e  $g$ .  
ii) Rappresentate graficamente la funzione inversa  $f^{-1} : [-2, 1] \rightarrow [-1, 4]$ .  
iii) Determinate  $g(\mathbb{R})$ . La funzione  $g$  è suriettiva?  
iv) Dite, motivando la risposta, se  $g$  è iniettiva.  
v) Rappresentate graficamente nel suo dominio la funzione  $x \mapsto -g(x - 1)$ .  
vi) Determinate, se esistono, il massimo e il minimo e i punti di massimo e i punti di minimo della funzione  $g$  su  $\mathbb{R}$ .  
vii) Determinate  $(f \circ g)(-1)$ .
-

COGNOME _____ NOME _____ MATRICOLA <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center; width: 100px;"> <tr> <td style="width: 15px; height: 15px;"></td> <td style="width: 15px; height: 15px;"></td> <td style="width: 15px; height: 15px;"></td> <td style="width: 15px; height: 15px;"></td> <td style="width: 15px; height: 15px;"></td> <td style="width: 15px; height: 15px;"></td> </tr> </table>							<div style="text-align: center; margin-bottom: 10px;">NON SCRIVERE QUI</div> <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center; width: 100px;"> <tr> <td style="width: 15px; height: 15px;"></td> <td style="width: 15px; height: 15px;"></td> <td style="width: 15px; height: 15px;"></td> <td style="width: 15px; height: 15px;"></td> <td style="width: 15px; height: 15px;"></td> <td style="width: 15px; height: 15px;"></td> </tr> </table> <div style="float: right; text-align: center; margin-top: 20px;"> <div style="border: 1px solid black; width: 100px; height: 100px; display: flex; align-items: center; justify-content: center; margin: 0 auto;">D</div> </div>						

UNIVERSITÀ DI TRENTO — FACOLTÀ DI SCIENZE COGNITIVE

CdL IN SCIENZE E TECNICHE DI PSICOLOGIA COGNITIVA  
 CdL IN INTERFACCE E TECNOLOGIE DELLA COMUNICAZIONE  
 CdL IN FILOSOFIA

PRIMA PROVA INTERMEDIA DI ANALISI MATEMATICA (CON ELEMENTI DI ALGEBRA)

A.A. 2012-2013 — ROVERETO, 30 OTTOBRE 2012

---

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **DUE ORE E MEZZA**.

**IL SUPERAMENTO DEI PRIMI 10 ESERCIZI È CONDIZIONE NECESSARIA PERCHÈ LA SECONDA PARTE DEL COMPITO VENGA VALUTATA. LE RISPOSTE DI QUESTE DEVONO ESSERE RIPORTATE SU QUESTO FOGLIO.**

Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.

È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.

Potete usare solo il vostro materiale di scrittura e il vostro materiale di studio. Non usate il colore rosso.

---

a1) Siano dati gli insiemi  $A = ]3, +\infty[$  e  $B = [1, 4] \cup \{5\}$ . Determinate l'insieme  $A \setminus B$ .

*Risposta:*

---

a2) Sia  $A = ]-1, 4[ \cup \{5\}$ . Dite quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali sono false:

(i)  $\max A = 5$ ;    (ii)  $\{-1\} \in \mathcal{P}(A)$ ;    (iii)  $A$  è un intervallo;    (iv)  $A$  è limitato.

*Risposta:*

---

a3) Scrivete la negazione della seguente proposizione: " $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{Q} : x + 2y = 0$ ".

*Risposta:*

---

a4) Determinate tutti gli  $a \in \mathbb{R}$  tali che l'equazione  $x^2 - x = a$  non ha soluzioni.

*Risposta:*

---

a5) Rappresentate graficamente  $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 = 1, y^2 \leq 9\}$ .

*Risposta:*

---

a6) Scrivete l'equazione della retta  $r$  di pendenza  $m = -2$  e passante per il punto  $P = (1, 2)$ .

*Risposta:*

---

a7) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano l'insieme delle coppie  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  soddisfacenti  $x^2 + 9(y - 2)^2 > 9$ .

*Risposta:*

---

a8) Risolvete la seguente disequazione  $\frac{x+1}{x} < 3$ .

*Risposta:*

---

a9) Sia  $f : [-2, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} -2x^2 & \text{se } -2 \leq x < 0 \\ x + 1 & \text{se } 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Determinate l'immagine di  $f$ .

*Risposta:*

---

a10) Siano  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  le funzioni definite da

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^3 & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{1}{x^2} & \text{se } x > 0 \end{cases} \quad g(x) = x^2 + 1.$$

Determinate  $(f + g)(1)$  e  $(fg)(-1)$ .

*Risposta:*

---

b1) i) Siano  $\mathcal{P}$  e  $\mathcal{Q}$  due proposizioni. Provate che la proposizione "  $\mathcal{P}$  e  $\mathcal{Q}$  " è equivalente alla proposizione " **non**(**non** $\mathcal{P}$  o **non** $\mathcal{Q}$ )".

ii) Scrivete in matematica (individuando un opportuno predicato) la seguente proposizione: "Ogni settimana c'è almeno una fabbrica italiana in agitazione per sciopero."

---

b2) i) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano l'insieme  $S$  delle coppie  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  soddisfacenti il seguente sistema di disequazioni

$$\begin{cases} y - x^2 + 4 \geq 0 \\ y - 2x - 4 < 0 \\ 4x^2 + (y + 1)^2 > 1. \end{cases}$$

ii) Determinate l'equazione delle rette orizzontali che non intersecano mai l'insieme  $S$ .

---

b3) i) Determinate il centro  $C$  dell'iperbole di equazione

$$x^2 - 4y^2 + 2x + 16y - 19 = 0.$$

ii) Scrivete l'equazione della retta  $r$  passante per  $C$  e per l'origine  $O = (0, 0)$ . Provate che  $r$  non interseca mai l'iperbole.

iii) Scrivete l'equazione della retta  $r'$  perpendicolare alla retta  $r$  e passante per  $C$  e determinate il suo punto d'intersezione  $S$  con l'asse delle ascisse.

iv) Rappresentate graficamente  $r$ ,  $r'$  e l'iperbole nello stesso sistema di riferimento.

---

b4) Siano dati gli insiemi  $A$  e  $B$  definiti da

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x^2(x^2 + x - 6)}{-x^2 - 1} > 0 \right\}, \quad B = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{1}{x - 1} \geq -x \right\}.$$

i) Determinate  $A$  e  $B$  e rappresentateli sulla retta reale. Dite se sono insiemi limitati.

ii) Determinate gli insiemi  $A \cap B$  e  $\mathbb{R} \setminus B$ . Dite se  $A$  e  $B$  sono insiemi disgiunti.

iii) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano l'insieme  $A \times B$ .

---

b5) Siano  $f : ]-1, 2] \rightarrow [-7, 2[$  e  $g : ]-\infty, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  le funzioni definite da

$$f(x) = -x^3 + 1 \quad g(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x^2} & \text{se } x \leq -1 \\ -x^4 + 1 & \text{se } -1 < x \leq 1 \\ \sqrt{x-1} & \text{se } 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

i) Rappresentate graficamente  $f$  e  $g$ .

ii) Rappresentate graficamente la funzione inversa  $f^{-1} : [-7, 2[ \rightarrow ]-1, 2]$ .

iii) Determinate  $g(\mathbb{R})$ . La funzione  $g$  è suriettiva?

iv) Dite, motivando la risposta, se  $g$  è iniettiva.

v) Rappresentate graficamente nel suo dominio la funzione  $x \mapsto -g(x+1)$ .

vi) Determinate, se esistono, il massimo e il minimo e i punti di massimo e i punti di minimo della funzione  $g$  su  $\mathbb{R}$ .

vii) Determinate  $(f \circ g)(-1)$ .

---