

COGNOME _____ NOME _____ MATRICOLA <span style="border-bottom: 1px solid black; display: inline-block; width: 100px; height: 1em; vertical-align: middle;"></span>	<div style="text-align: center;">NON SCRIVERE QUI</div> <div style="display: flex; justify-content: space-between; align-items: center;"> <table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr> <td style="width: 20px; height: 20px;">1</td> <td style="width: 20px; height: 20px;">2</td> <td style="width: 20px; height: 20px;">3</td> <td style="width: 20px; height: 20px;">4</td> <td style="width: 20px; height: 20px;">5</td> <td style="width: 20px; height: 20px;">6</td> </tr> </table> <div style="border: 1px solid black; width: 80px; height: 60px; display: flex; align-items: center; justify-content: center; font-size: 2em; margin-left: 10px;">A</div> </div>	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6		

UNIVERSITÀ DI TRENTO — FACOLTÀ DI SCIENZE COGNITIVE

CdL IN SCIENZE E TECNICHE DI PSICOLOGIA COGNITIVA  
 CdL IN INTERFACCE E TECNOLOGIE DELLA COMUNICAZIONE  
 CdL IN FILOSOFIA

SECONDA PROVA INTERMEDIA DI ANALISI MATEMATICA (CON ELEMENTI DI ALGEBRA)

A.A. 2012-2013 — ROVERETO, 7 GENNAIO 2013

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **TRE ORE**.

**Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.**

**È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti;** al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.

**Potete usare solo il vostro materiale di scrittura e il vostro materiale di studio.** Non usate il colore rosso.

1) i) Calcolate

$$\int_{-1}^0 (4x+3)^5 dx; \quad \int_{-3}^2 \left( \frac{4x}{x^2+1} + x^2 \right) dx; \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} \left( \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x^2-4} \right).$$

ii) Calcolate l'area della regione piana  $E$ , a cui appartiene l'origine degli assi, e che è delimitata dai grafici delle funzioni  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definite da  $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$  e  $g(x) = |x| - 1$  e dalla retta di equazione  $x = 1$ .

iii) Calcolate  $\sum_{n=0}^4 \frac{f(-n)}{n!}$ , dove  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è definita da  $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{se } x < -2 \\ 2 & \text{se } -2 \leq x < 0 \\ 1 & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$

iv) Scrivete l'espressione  $\frac{a_1}{2} - \frac{a_2}{4} + \frac{a_3}{6} - \dots + \frac{a_{15}}{30}$  usando il simbolo di sommatoria.

2) Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \leq -1 \\ x^3 & \text{se } -1 < x \leq 0 \\ 2x^2 & \text{se } 0 < x < 1 \\ (x-2)^2 + 1 & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

i) Rappresentate nel piano cartesiano il grafico di  $f$ .

ii) Verificate che  $f$  è una funzione continua nei punti  $x_0 \in \{-1, 0, 1\}$ .

iii) Calcolate  $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h}$  e  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h}$ . Dite se  $f$  è derivabile in  $x_0 = 0$ .

iv) Determinate il massimo e il minimo (riso. i punti di massimo e i punti di minimo) di  $f$  su  $[-2, 3]$ .

3) Risolvete in  $\mathbb{R}$  le seguenti disequazioni/equazioni:

$$x^3 \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} - x^2 \log_2 16 \leq -x \log_{\frac{1}{3}} 243; \quad \frac{3^{|x-1|} 3^{x^2}}{9} = 27^x; \quad \log_{\frac{1}{3}} (|x| - 1) \geq 0.$$

---

4) Rappresentate una funzione  $f : [-1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$  continua e derivabile tale che la sua funzione integrale  $F : [-1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $F(x) = \int_{-1}^x f(t) dt$  soddisfi entrambe le seguenti proprietà:

- i)  $F$  è crescente su  $[-1, 3]$ ;
- ii)  $F$  è concava su  $[-1, 2]$  e convessa su  $[2, 3]$ .

---

5) i) Studiate (insieme di definizione, segno, comportamento agli estremi dell'insieme di definizione, asintoti, continuità, derivabilità, punti critici e monotonia, convessità/concavità) la funzione definita da

$$f(x) = \frac{x^2 + 4x + 4}{x + 1}$$

e rappresentatela graficamente nel piano cartesiano.

- ii) Verificate che  $f(x) = x + 3 + \frac{1}{x+1}$  per ogni  $x \in \text{dom } f$ .
- iii) Determinate l'area della regione piana  $E$  delimitata dal grafico di  $f$ , dal grafico della funzione  $g(x) = -x^2 + 4$  e dalla retta di equazione  $x = 2$ .

---

6) Provate che la funzione  $f(x) = 2x^5 + 3x - 2$  interseca l'asse  $x$  una ed una sola volta. Determinate un'intervallo  $[a, b] \subset [0, 1]$  di ampiezza minore o uguale a  $\frac{1}{4}$  che contiene tale punto d'intersezione.

---