

COGNOME _____
 NOME _____
 MATRICOLA | | | | | |

NON SCRIVERE QUI

1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6

A

UNIVERSITÀ DI TRENTO — FACOLTÀ DI SCIENZE COGNITIVE

CDL IN SCIENZE E TECNICHE DI PSICOLOGIA COGNITIVA
 CDL IN INTERFACCE E TECNOLOGIE DELLA COMUNICAZIONE
 CDL IN FILOSOFIA

SECONDA PROVA INTERMEDIA DI ANALISI MATEMATICA (CON ELEMENTI DI ALGEBRA)

A.A. 2012-2013 — ROVERETO, 7 GENNAIO 2013

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **TRE ORE**.

Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.

È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.

Potete usare solo il vostro materiale di scrittura e il vostro materiale di studio. Non usate il colore rosso.

1) i) Calcolate

$$\int_{-1}^0 (4x+3)^5 dx; \quad \int_{-3}^2 \left(\frac{4x}{x^2+1} + x^2 \right) dx; \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x^2-4} \right).$$

ii) Calcolate l'area della regione piana E , a cui appartiene l'origine degli assi, e che è delimitata dai grafici delle funzioni $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definite da $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$ e $g(x) = |x| - 1$ e dalla retta di equazione $x = 1$.

iii) Calcolate $\sum_{n=0}^4 \frac{f(-n)}{n!}$, dove $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è definita da $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{se } x < -2 \\ 2 & \text{se } -2 \leq x < 0 \\ 1 & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$

iv) Scrivete l'espressione $\frac{a_1}{2} - \frac{a_2}{4} + \frac{a_3}{6} - \dots + \frac{a_{15}}{30}$ usando il simbolo di sommatoria.

2) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \leq -1 \\ x^3 & \text{se } -1 < x \leq 0 \\ 2x^2 & \text{se } 0 < x < 1 \\ (x-2)^2 + 1 & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

i) Rappresentate nel piano cartesiano il grafico di f .

ii) Verificate che f è una funzione continua nei punti $x_0 \in \{-1, 0, 1\}$.

iii) Calcolate $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h}$ e $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h}$. Dite se f è derivabile in $x_0 = 0$.

iv) Determinate il massimo e il minimo (riso. i punti di massimo e i punti di minimo) di f su $[-2, 3]$.

- 3) Risolvete in \mathbb{R} le seguenti disequazioni/equazioni:

$$x^3 \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} - x^2 \log_2 16 \leq -x \log_{\frac{1}{3}} 243; \quad \frac{3^{|x-1|} 3^{x^2}}{9} = 27^x; \quad \log_{\frac{1}{3}} (|x| - 1) \geq 0.$$

- 4) Rappresentate una funzione $f : [-1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ continua e derivabile tale che la sua funzione integrale $F : [-1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $F(x) = \int_{-1}^x f(t) dt$ soddisfi entrambe le seguenti proprietà:
 i) F è crescente su $[-1, 3]$;
 ii) F è concava su $[-1, 2]$ e convessa su $[2, 3]$.

- 5) i) Studiate (insieme di definizione, segno, comportamento agli estremi dell'insieme di definizione, asintoti, continuità, derivabilità, punti critici e monotonìa, convessità/concavità) la funzione definita da

$$f(x) = \frac{x^2 + 4x + 4}{x + 1}$$

e rappresentatela graficamente nel piano cartesiano.

ii) Verificate che $f(x) = x + 3 + \frac{1}{x+1}$ per ogni $x \in \text{dom } f$.

iii) Determinate l'area della regione piana E delimitata dal grafico di f , dal grafico della funzione $g(x) = -x^2 + 4$ e dalla retta di equazione $x = 2$.

- 6) Provate che la funzione $f(x) = 2x^5 + 3x - 2$ interseca l'asse x una ed una sola volta.
 Determinate un'intervallo $[a, b] \subset [0, 1]$ di ampiezza minore o uguale a $\frac{1}{4}$ che contiene tale punto d'intersezione.