Cognome ____________________

Nome ____________________

Matricola |_|_|_|_|_|_|

Non scrivere qui

1	2	3	4	5	6

Università di Trento — Facoltà di Scienze Cognitive

CdL in Scienze e Tecniche di Psicologia Cognitiva

Verifica settimanale di Analisi Matematica

A.A. 2012-2013 — Rovereto, 3 - 7 Dicembre 2012

Riempite questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Svolgete gli esercizi prima in brutta, poi copiateli ordinatamente su un foglio di protocollo (su cui avete scritto in stampatello cognome, nome e numero di matricola) e riconsegnate questo foglio insieme all'elaborato alla prima lezione di settimana prossima. Non usate il colore rosso.

1) i) Usate il simbolo di sommatoria per scrivere le seguenti somme:

$$-\frac{a^2}{3}+\frac{a^4}{5}-\frac{a^6}{7}+\cdots+\frac{a^{20}}{21}\,; \qquad \frac{1}{2}+\frac{2}{3}+1+\frac{8}{5}+\cdots+\frac{512}{11}\,;$$

$$\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{6}x^3+\cdots+\frac{1}{20}x^{10}-\frac{1}{30}x^{11}\,.$$

ii) Calcolate

a) $\displaystyle\sum_{j=1}^{4}\text{perimetro}\,(T_j)$ e $\displaystyle\sum_{j=1}^{8}\text{area}\,(T_j)$, dove T_j sono i triangoli dati da

$$T_j=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le y\le -j|x|+j\}\,;$$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{5}f(n)$, dove $f(x)=\log(\frac{1}{e^x})$;

c) $\displaystyle\sum_{m=0}^{6}\int_m^{m+1}|x-2|\,dx\,;$ $\qquad\displaystyle\sum_{k=2}^{40}\Big(\frac{1}{k(k-1)}-\frac{1}{k(k+1)}\Big)\,.$

2) Calcolate i seguenti integrali definiti interpretando gli integrali come aree:

$$\int_{-1}^{3}(x+2)\,dx\,;\quad \int_{-1}^{1}(-4|x|+4)\,dx,;\quad \int_{-1}^{1}(2|x|-4)\,dx\,;\quad \int_{2}^{5}(-3)\,dx\,;\quad \int_{-1}^{2}(2x+2)\,dx\,.$$

3) Calcolate i seguenti integrali definiti:

i) $\displaystyle\int_1^2\Big(x^{-2}+\frac{1}{x^3}\Big)\,dx\,;$ $\qquad\displaystyle\int_{-3}^{-2}\Big(e^x+\frac{2}{x}\Big)\,dx\,;$ $\qquad\displaystyle\int_1^4\Big(\frac{\sqrt{x}}{2}+x^2\Big)\,dx\,;$

ii) $\displaystyle\int_{-1}^{3}(3^x+\sqrt[3]{x})\,dx\,;$ $\qquad\displaystyle\int_1^2\frac{2x^3-4x^2}{x}\,dx\,;$ $\qquad\displaystyle\int_0^1\frac{e^{2x}-1}{e^x+1}\,dx\,.$

4) a) Calcolate l'area della regione piana delimitata

i) dal grafico di $f(x)=x^4$ e dal grafico di $g(x)=\sqrt[3]{x}$;

ii) dal grafico di $f(x) = e^x - 1$, dalla retta tangente al grafico di f nel punto $(0,0)$ e dalla retta di equazione $x = 1$.

b) Provate che la funzione $F(x) = (\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}) \log x - \frac{x^3}{9} - \frac{x^2}{4}$ è una primitiva di $f(x) = (x^2 + x) \log x$ su $]0, +\infty[$. Calcolate $\int_1^e f(x)\, dx$.

---

5) Sia $f : [-2, 3] \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{se } -2 \leq x \leq -1 \\ x^4 & \text{se } -1 < x \leq 1 \\ \frac{2}{x} & \text{se } 1 < x \leq 3 . \end{cases}$$

i) Rappresentate nel piano cartesiano il grafico di f.

ii) Calcolate $\int_{-2}^{3} f(x)\, dx$.

iii) Indicate nel grafico di f ciò che rappresenta l'integrale calcolato in ii).

iv) Determinate gli eventuali punti di massimo locale e punti di minimo locale di f.

---

6) i) a) Studiate la funzione (insieme di definizione; segno; comportamento agli estremi del dominio, asintoti; continuità; derivata e punti critici; natura dei punti critici (usando il segno della derivata); convessità/concavità)

$$g(x) = \frac{1}{x(x-2)}$$

e tracciatene un grafico qualitativo.

b) Provate che $G(x) = \frac{1}{2}(\log(x-2) - \log x)$ è una primitiva di $g(x)$ su $]2, +\infty[$.

c) Calcolate l'area della regione piana E delimitata dal grafico di g e dalle rette di equazione $x = 3$, $x = 4$ e $y = 0$.

ii) a) Studiate la funzione (insieme di definizione; segno; comportamento agli estremi del dominio, asintoti; continuità; derivata e punti critici; natura dei punti critici (usando il segno della derivata))

$$h(x) = (2x^2 + 3x)e^x$$

e tracciatene un grafico qualitativo.

b) Provate che $H(x) = (2x^2 - x + 1)e^x$ è una primitiva di $h(x)$ su $\mathbb{R}$.

c) Calcolate $\int_0^1 h(x)\, dx$.
