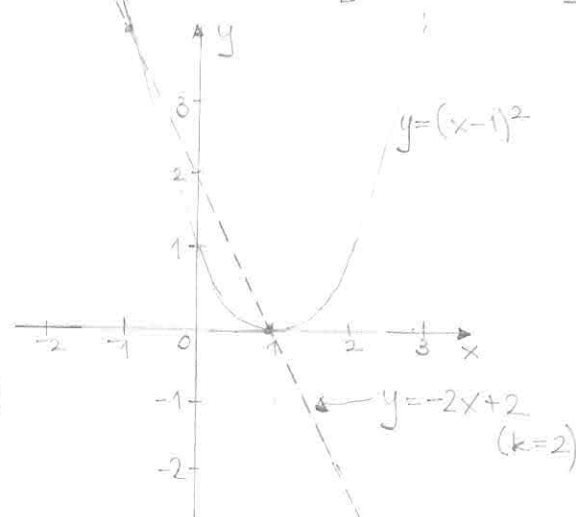
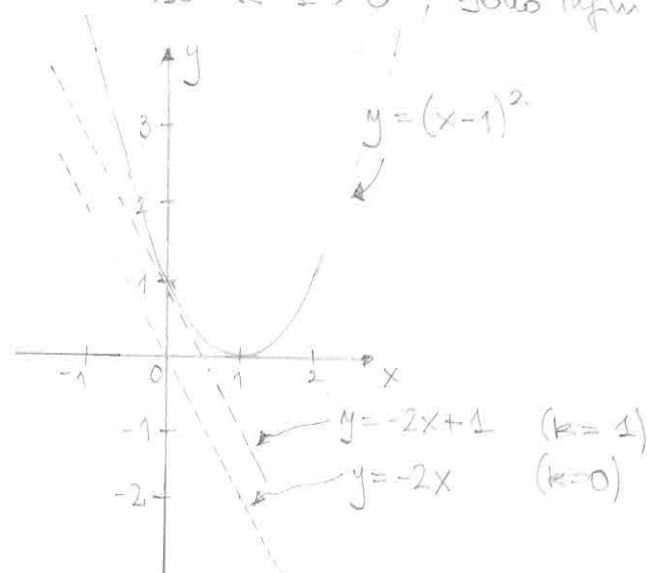


1) i) $(x-1)^2 \leq -2x+k \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 \leq -2x + k \Leftrightarrow x^2 \leq k-1$

Ora se $k-1 < 0$, l'insieme di soluzioni di $x^2 \leq k-1$;

se $k-1 = 0$, l'insieme di soluzioni è $x=0$;

se $k-1 > 0$, l'insieme di soluzioni infinite soluzioni: $x \in [-\sqrt{k-1}, \sqrt{k-1}]$



Interpret. geom. le soluzioni corrispondono alle coordinate x dei pt. (x,y)

appartenenti alla retta $y = -2x+k$ per i quali $y = (x-1)^2$ è minore di $y = -2x+k$ che intuitivamente significa le x per cui la retta $y = -2x+k$ "sta sopra o interseca" la parabola $y = (x-1)^2$. $\square$

ii) $(x+1)^2 + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$ è l'eq. dell'ellisse di centro $C=(-1,1)$ e semiasse $a=1$ e $b=2$.

Gli eventuali punti di intersezione dell'ellisse $\mathcal{E}$ con la retta di eq. $y = -x+1$ devono soddisfare il sistema di equazioni

$$\begin{cases} (x+1)^2 + \frac{(y-1)^2}{4} = 1 \\ y = -x+1 \end{cases}$$

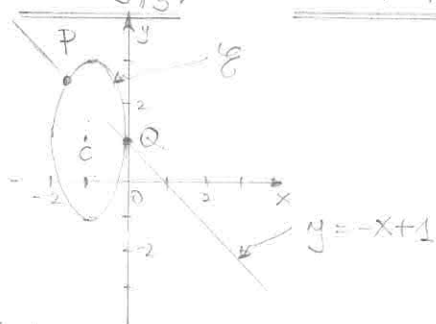
Inserendo la 2ª eq. nella 1ª eq. si ottiene

$$(x+1)^2 + \frac{(-x+1-1)^2}{4} = 1, \text{ ossia}$$

$$x^2 + 2x + 1 + \frac{x^2}{4} = 1, \text{ ossia}$$

$$\frac{5x^2}{4} + 2x = 0, \text{ da cui } x_1 = 0 \text{ e } x_2 = -\frac{8}{5}$$

Ne segue $y_1 = +1$ e $y_2 = \frac{13}{5}$, e possiamo scrivere $P = (-\frac{8}{5}, \frac{13}{5})$ e $Q = (0, 1)$.



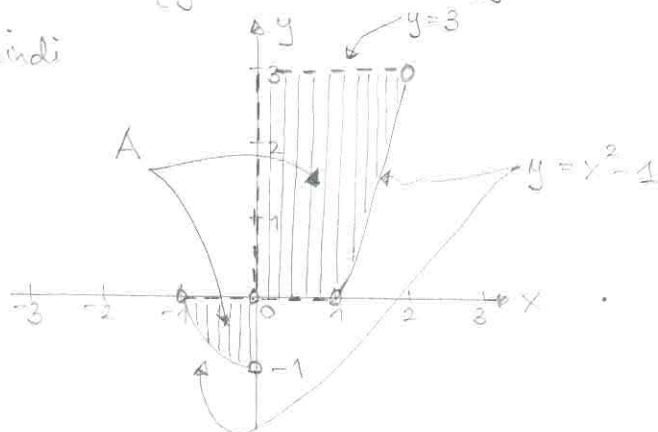
$$d(P, Q) = \sqrt{\frac{64}{25} + \frac{64}{25}} = \frac{8\sqrt{2}}{5}$$

2) i) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 0, x^2 - 1 \leq y < 3\}$

Notiamo che $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ soddisfa $xy > 0$ se e solo se $x < 0$ e $y < 0$ oppure $x > 0$ e $y > 0$.

Inoltre, la parabola di eq. $y = x^2 - 1$ interseca la retta di eq. $y = 3$ nei pt. (x, y) t.c. $\begin{cases} x^2 - 1 = 3 \\ y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow S_1 = (-2, 3), S_2 = (2, 3)$.

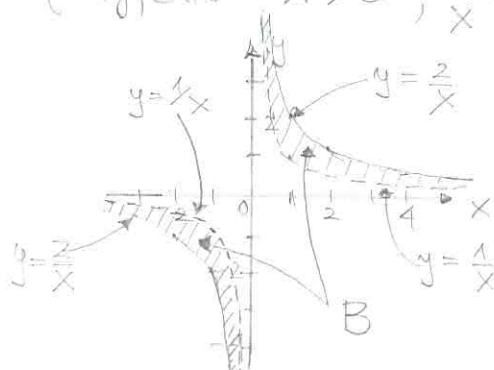
Risulta quindi



Sia $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < xy \leq 2\}$.

Osserviamo che $(0, y) \notin B$ per ogni $y \in \mathbb{R}$, poiché deve essere $xy > 1 \quad \forall (x, y) \in B$ e quindi, in particolare, deve essere $xy > 0$. Quindi possiamo scrivere

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, \frac{1}{x} < y \leq \frac{2}{x}\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0, \frac{1}{x} > y \geq \frac{2}{x}\}$$



ii) • A: rette orizzontali che non intersecano mai A hanno eq.

$$y=k \text{ con } k \in]-\infty, -1] \cup \{0\} \cup [3, +\infty[;$$

rette verticali che non intersecano mai A hanno eq.

$$x=k \text{ con } k \in]-\infty, -1] \cup [2, +\infty[.$$

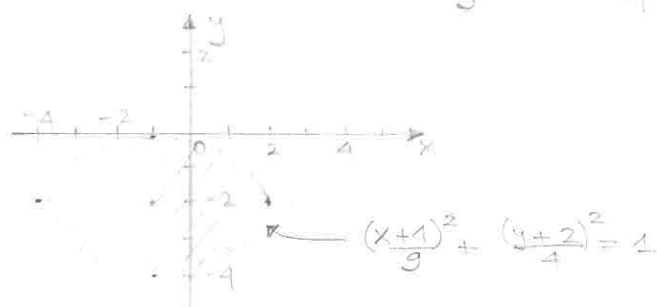
• B: rette orizzontali che non intersecano mai B hanno eq.

$$y=k \text{ con } k=0;$$

rette verticali che non intersecano mai B hanno eq.

$$x=0 \text{ con } k=0.$$

3) i) $4(x+1)^2 + 9(y+2)^2 \leq 36 \Leftrightarrow \frac{(x+1)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{4} \leq 1$



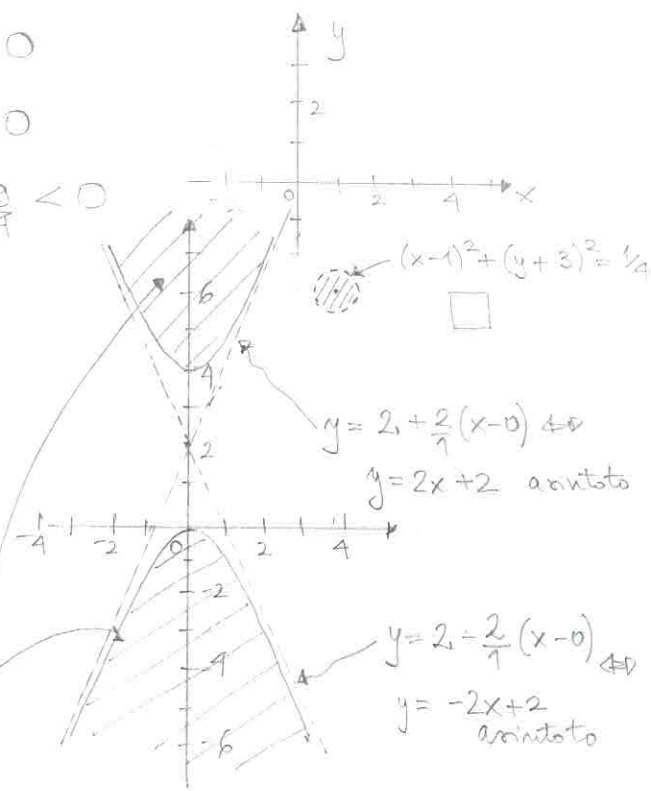
ii) $4x^2 + y^2 - 8x + 24y + 39 \leq 0 \Leftrightarrow$

$$x^2 + y^2 - 2x + 6y + \frac{39}{4} \leq 0$$

$$\underbrace{x^2 - 2x}_{(x-1)^2 - 1} + \underbrace{y^2 + 6y}_{(y+3)^2 - 9} + \frac{39}{4} \leq 0$$

$$(x-1)^2 - 1 + (y+3)^2 - 9 + \frac{39}{4} \leq 0$$

$$(x-1)^2 + (y+3)^2 \leq \frac{1}{4}$$



iii) $4x^2 - y^2 + 4y \leq 0$

$$4x^2 - (y^2 - 4y) \leq 0 \Leftrightarrow$$

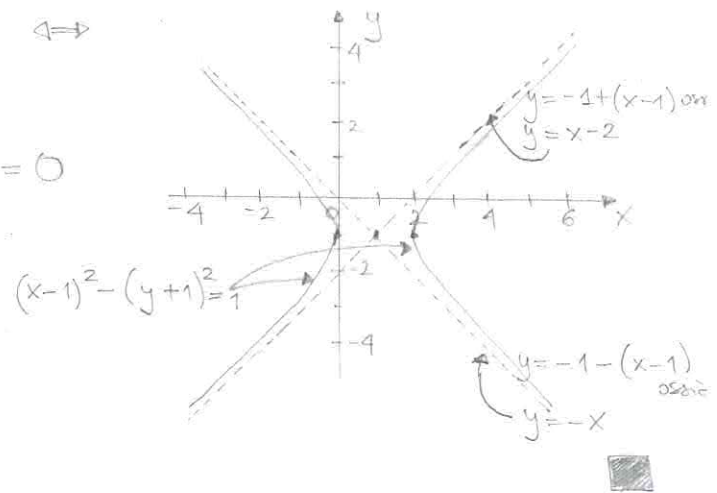
$$4x^2 - (y-2)^2 + 4 \leq 0$$

$$4x^2 - (y-2)^2 \leq -4 \Leftrightarrow$$

$$-x^2 + \frac{(y-2)^2}{4} \geq 1$$

-4-

$$\begin{aligned} \text{ii)} \quad x^2 - y^2 - 2x - 2y - 1 &= 0 \quad \Leftrightarrow \\ x^2 - 2x - (y^2 + 2y) - 1 &= 0 \\ (x-1)^2 - 1 - (y+1)^2 + 1 - 1 &= 0 \\ (x-1)^2 - (y+1)^2 &= 1 \\ C &= (1, -1) \end{aligned}$$



$$4) \begin{cases} -3 < y < -x^2 + 2x \\ (x-1)^2 + \frac{(y+2)^2}{\frac{1}{4}} \geq 1 \end{cases}$$

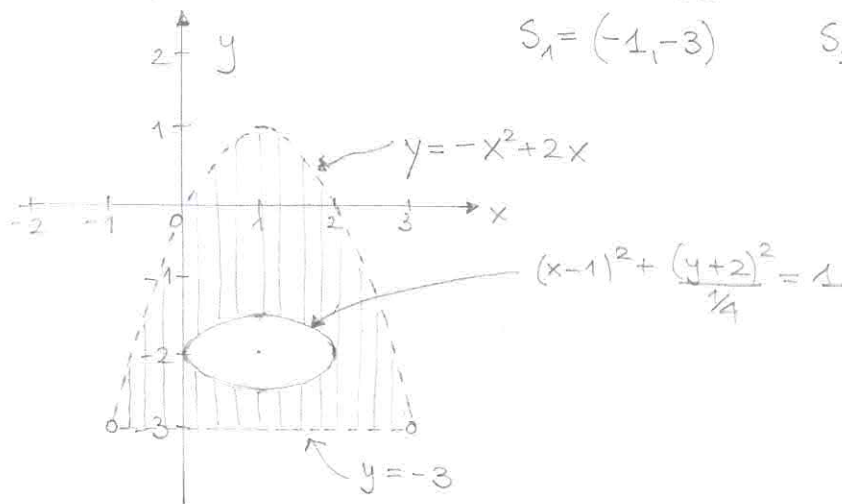
$$y = -x^2 + 2x \quad \text{intersects l'asse } x \quad \text{in } x=0, x=2$$

$$= -(x^2 - 2x)$$

$$y = -(x-1)^2 + 1 \quad V = (1, 1)$$

Inoltre $y = -x^2 + 2x$ interseca la retta di eq. $y = -3$ nei pt. per cui $\begin{cases} -3 = -x^2 + 2x \\ y = -3 \end{cases}$, ossia $\begin{cases} x^2 - 2x - 3 = 0 \\ y = -3 \end{cases}$; ne segue

$$S_1 = (-1, -3) \quad S_2 = (3, -3).$$

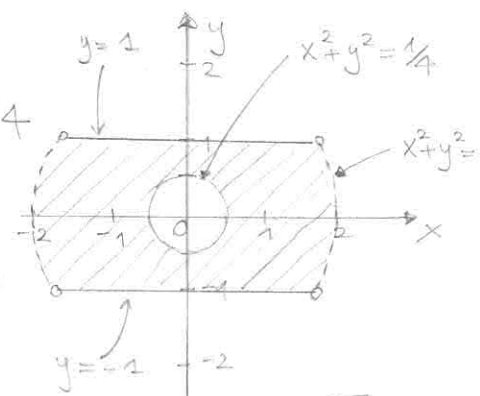


$$\begin{cases} y^2 \leq 1 \\ 1 \leq 4x^2 + 4y^2 < 16 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} -1 &\leq y \leq 1 \\ \frac{1}{4} &\leq x^2 + y^2 < 4 \end{aligned}$$

Osserviamo che $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = 1 \end{cases}$ ha come soluzioni i pt. $(-\sqrt{3}, 1)$ e $(\sqrt{3}, 1)$

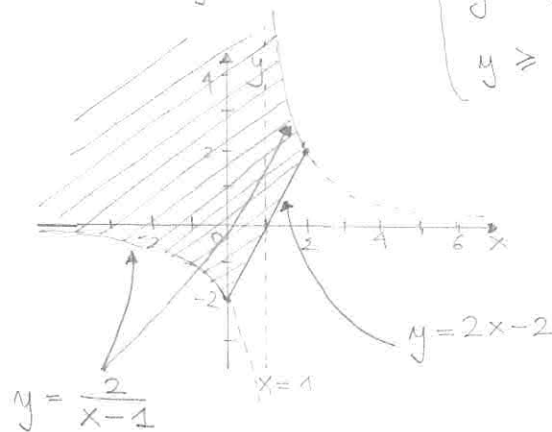
Analogamente per $y = -1$.



$$\begin{cases} (x-1)y \leq 2 \\ y \geq 2x-2 \end{cases}$$

Abbiamo $(x-1)y \leq 2$ è soddisfatta dai pt. sulla
retta di eq. $x=1$; inoltre, per $x \neq 1$, si ha

$$(x-1)y \leq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq \frac{2}{x-1} & \text{se } x > 1 \\ y \geq \frac{2}{x-1} & \text{se } x < 1 \end{cases}$$



5) i) $x^2 + y^2 + 2x + 1 > 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 + y^2 > 0$

$S = \mathbb{R}^2 \setminus \{(-1, 0)\}$;

ii) $x^2 + y^2 + 2x + 1 < 0$

$S = \emptyset$;

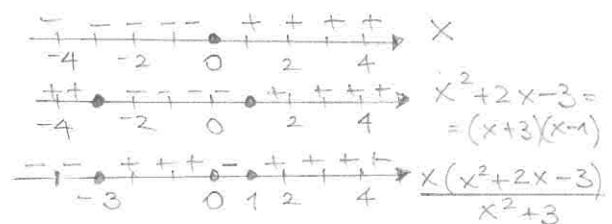
iii) $x^2 + 4y^2 = 0$

$S = \{(0, 0)\}$;

iv) $9x^2 + 4y^2 + 1 > 0$

$S = \mathbb{R}^2$.

6) • $A = \{x \in \mathbb{R} : \frac{x(x^2 + 2x - 3)}{x^2 + 3} \leq 0\}$
 $=]-\infty, -3] \cup [0, 1]$

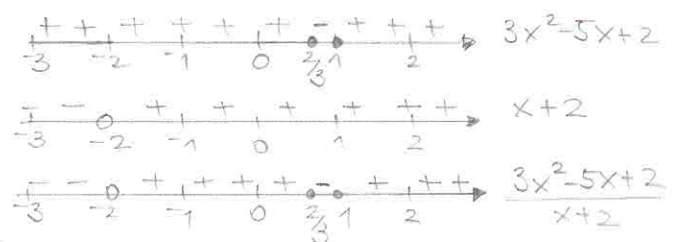


A non è limitato inferiormente;

A è limitato superiormente; inoltre $\max A = 1$.

• $B = \{x \in \mathbb{R} : \frac{3x(x-2)}{x+2} \geq -1\} = \{x \in \mathbb{R} : \frac{3x^2 - 6x + x + 2}{x+2} \geq 0\} =$
 $= \{x \in \mathbb{R} : \frac{3x^2 - 5x + 2}{x+2} \geq 0\}$

$=]-2, \frac{2}{3}] \cup [1, +\infty[$



B non è limitato superiormente;

B è limitato inferiormente, ma non ammette minimo.

• $C = \mathbb{R} \setminus]-\infty, 3[= [3, +\infty[$ C non è limitato superiormente; C è limitato inferiormente e $\min C = 3$.