

$$1) x^2 \log e - x \log_2 32 + 6 \log_{10} 10 > 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 > 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-3) > 0$$

$$\Rightarrow S =]-\infty, 2[\cup]3, +\infty[. \quad \square$$

$$3^{-|x|+1} 9^{-2} = \frac{1}{3^4} \Leftrightarrow 3^{-|x|+1} \cdot 3^{-4} = 3^{-4} \Leftrightarrow 3^{-|x|+1} = 3^0$$

$$\Leftrightarrow -|x|+1=0 \Leftrightarrow |x|=1$$

$$\Rightarrow S = \{-1, 1\}. \quad \square$$

$$\log_2 2^x + \log_2 \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+1} = -3$$

$$\Leftrightarrow x + \log_2 2^{-x^2-1} = -3$$

$$\Leftrightarrow x - x^2 - 1 = -3$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x+1) = 0 \Rightarrow S = \{-1, 2\}. \quad \square$$

$$2) \left(\frac{1}{3}\right)^{2x-x^2} < 1 \Leftrightarrow 3^{x^2-2x} < 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x < 0 \Leftrightarrow x(x-2) < 0$$

$$\Rightarrow S =]0, 2[; \quad \square$$

$$e^x \cdot e^{3-x^2} \leq \frac{1}{e^x} \Leftrightarrow e^x \cdot e^{3-x^2} \leq e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow e^{x+3-x^2} \leq e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + x + 3 \leq -x$$

$$e^x \uparrow \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(x+1) \geq 0$$

$$\Rightarrow S =]-\infty, -1] \cup [3, +\infty[; \quad \square$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^x - 5^{x^2-2x} \leq 0 \Leftrightarrow 5^{-x} \leq 5^{x^2-2x}$$

$$\Leftrightarrow -x \leq x^2 - 2x \Leftrightarrow 0 \leq x^2 - x$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq x(x-1)$$

$$\Rightarrow S =]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[; \quad \square$$

$$\begin{aligned} \log_{1/3} |x+1| > 0 &\Leftrightarrow \log_{1/3} |x+1| > \log_{1/3} 1 \\ &\Leftrightarrow \log_{1/3} x \downarrow \begin{cases} |x+1| \neq 0 \\ |x+1| < 1 \end{cases} \quad (\text{altrimenti non è def. } \log_{1/3} x) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ -1 < x+1 < 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ -2 < x < 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{S =]-2, 0[\setminus \{-1\}}. \quad \square \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log_3(|x|+1) > -\log_3 9 &\Leftrightarrow \log_3(|x|+1) > \log_3 \frac{1}{9} \\ &\Leftrightarrow |x|+1 > \frac{1}{9} \Leftrightarrow |x| > -\frac{8}{9} \\ &\text{oss. che } |x|+1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ &\text{e } \log_3 x \uparrow \quad \underline{S = \mathbb{R}} \quad \square \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log_{1/3}(x-1) > 2 &\Leftrightarrow \log_{1/3}(x-1) > \log_{1/3} \frac{1}{9} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x-1 > 0 \\ x-1 < \frac{1}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < \frac{10}{9} \end{cases} \Rightarrow \underline{S =]1, \frac{10}{9}[}. \quad \square \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log_2(1-x) - \log_2(|x|+1) > -1 &\Leftrightarrow \log_2(1-x) - \log_2(|x|+1) > \log_2 \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 1-x > 0 \\ |x|+1 > 0 \\ \log_2 \frac{1-x}{|x|+1} > \log_2 \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x \in \mathbb{R} \\ \frac{1-x}{|x|+1} > \frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

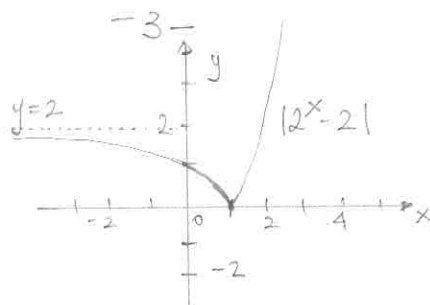
$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ 1-x \geq \frac{1}{2}(|x|+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x \geq 0 \\ 1-x > \frac{1}{2}(x+1) \end{cases} \circ \begin{cases} x < 1 \\ x < 0 \\ 1-x > \frac{1}{2}(-x+1) \end{cases} \\ &\text{poiché } |x|+1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ &\text{quindi possiamo moltiplicare senza problema!!} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x \geq 0 \\ \frac{1}{2} > \frac{3}{2}x \end{cases} \circ \begin{cases} x < 1 \\ x < 0 \\ \frac{1}{2} > \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x \geq 0 \\ x < \frac{1}{3} \end{cases} \circ \begin{cases} x < 1 \\ x < 0 \\ x < 1 \end{cases}$$

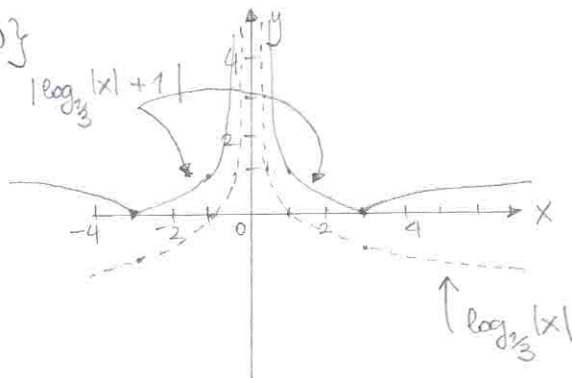
$$\Rightarrow \underline{S = [0, \frac{1}{3}[\cup]-\infty, 0[=]-\infty, \frac{1}{3}[.} \quad \blacksquare$$

$$3) |2^x - 2|$$

$\mathbb{R}$



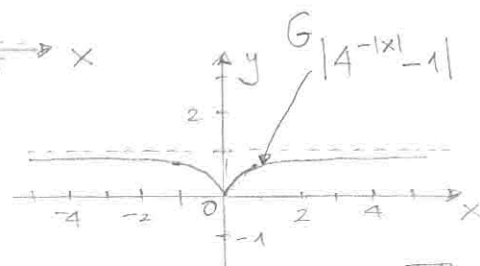
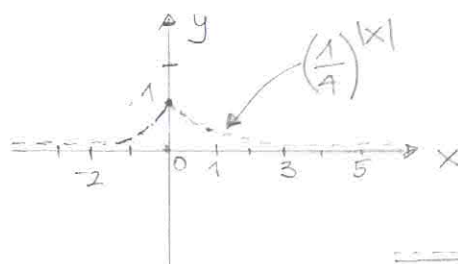
$$|\log_{1/3}|x| + 1| \quad \mathbb{R} \setminus \{0\}$$



$$|4^{-|x|} - 1|$$

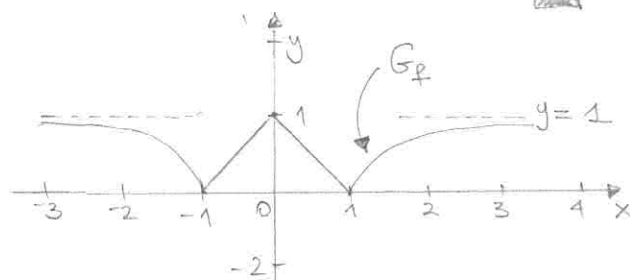
$$= \left| \left(\frac{1}{4}\right)^{|x|} - 1 \right|$$

$\mathbb{R}$



$$4) i) f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} -|x| + 1 & \text{se } x \in [-1, 1] \\ \left| \frac{1}{x^2} - 1 \right| & \text{altrimenti,} \end{cases}$$



ii) In ogni $x \neq -1$ o $x = 1$, la funzione f è continua essendo somma e composizione di funzioni continue. Inoltre, si osserva che la funzione $f_2(x) = \left| \frac{1}{x^2} - 1 \right|$ si "attacca" in $x = -1$ (e così in $x = 1$) bene alla funzione $f_1 = -|x| + 1$. Quindi f è continua in $\mathbb{R}$; in particolare è continua in $[-1, 3]$ e quindi soddisfa le ipotesi del teorema di Weierstrass.

$$\min_{[-1,3]} f = 0 \quad x \in \{-1, 1\} \text{ pt. di minimo;}$$

$$\max_{[-1,3]} f = 1 \quad x = 0 \text{ pt. di massimo.} \quad \square$$

iii) Osserviamo che $[0, 2]$ è un intervallo chiuso e limitato, e $f(0) = 0 + 1 = 1$, $f(2) = |\frac{1}{4} - 1| = \frac{3}{4}$. Quindi non sono soddisfatte le ipotesi del teorema di esistenza degli zeri in $[0, 2]$. Notiamo che f ha uno zero in $[0, 2]$; infatti $f(1) = 0$ (ricordiamo che il teorema di esistenza degli zeri dà cond. sufficienti affinché f abbia uno zero).

5) Poniamo $f(x) = x^3 + 3x - 1$ in $[0, 1]$; f è continua e $[0, 1]$ è un intervallo chiuso e limitato. Inoltre

$$f(0) = -1 (< 0) \text{ e } f(1) = 1 + 3 - 1 = 3 (> 0).$$

Per il teorema di esistenza degli zeri esiste $x_0 \in]0, 1[$

talche $f(x_0) = 0$, ossia x_0 è una soluzione di $x^3 = -3x + 1$.

Inoltre, poichè x^3 è una funzione crescente e anche $-3x + 1$ lo è, ne ha che $f(x)$ è una funzione crescente, e quindi lo zero è unico, e quindi $x^3 = -3x + 1$ ha solo la soluzione x_0 .

Poniamo $x_1 = \frac{1}{2}$ (pt. medio di $[0, 1]$), e abbiamo $f(x_1) =$

$$f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{8} + \frac{3}{2} - 1 = \frac{1+12-8}{8} = \frac{5}{8} > 0. \text{ Quindi } x_0 \text{ si}$$

trova ricurivamente nell'intervallo $[0, \frac{1}{2}]$; poniamo

$$x_2 = \frac{1}{4} \text{ (pt. medio di } [0, \frac{1}{2}]) \text{ e abbiamo } f(x_2) = f(\frac{1}{4}) =$$

$$= \frac{1}{64} + \frac{3}{4} - 1 = \frac{49}{64} - 1 < 0. \text{ Ponendo }]\tilde{a}, \tilde{b}[=$$

$$]\frac{1}{4}, \frac{1}{2}[, \text{ possiamo affermare che } x_0 \in]\tilde{a}, \tilde{b}[\text{ e } \tilde{b} - \tilde{a} \leq \frac{1}{4}.$$

6) i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$

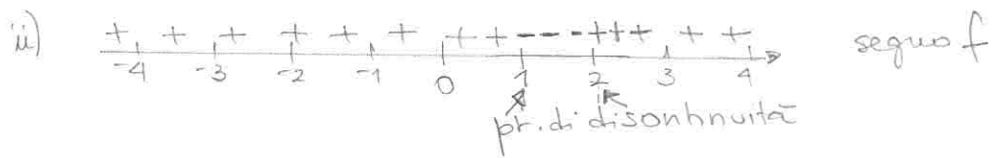
$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 3$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -1$

$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 3$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

□



□

iii) pt. di discontinuità $x = -1$, $x = 1$, $x = 2$.

□

iv) $\min_{[-1,1]} f = -1$ $x = 1$ pt. di minimo;

$\max_{[-1,1]} f = 3$ $x = -1$ pt. di massimo.

□

f non soddisfa il teorema di Weierstrass su $[-1,2]$

poiché f è discontinua in $x = 1$, $x = 2$.

■