

Università degli Studi di Trento - Facoltà di Scienze Cognitive
 CdL di Scienze e Tecniche di Psicologia Cognitiva
 CdL in Interfacce e Tecnologie della Comunicazione - CdL in Filosofia
 VERIFICA SETTIMANALE DI ANALISI MATEMATICA (CON ELEMENTI DI ALGEBRA)
 a. a. 2012/2013 - Rovereto, 19-25 novembre 2012

1) a) $\lim_{x \rightarrow -2^-} (x^4 - 1) = 16 - 1 = \underline{15};$

$\lim_{x \rightarrow 4^-} (3\sqrt{x} - \log_2 x) = 3\sqrt{4} - \log_2 4 = 6 - 2 = \underline{4};$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 1}{x} = \underline{2};$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x^2 + 1} = \underline{0};$

□

b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x^2 - 4} = \underline{-\infty};$
 infinitesimo negativo
 per $x \rightarrow 2^-$

$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x^2 - 4} \rightarrow \text{infinitesimo positivo} = \underline{+\infty};$
 per $x \rightarrow 2^+$

$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{x^5 + 1} \rightarrow \text{infinitesimo negativo} = \underline{-\infty};$
 per $x \rightarrow -1^-$

$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{x^5 + 1} \rightarrow \text{infinitesimo positivo} = \underline{+\infty};$
 per $x \rightarrow -1^+$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3^x + x}{x^2} = \underline{+\infty};$
 infinitesimo positivo
 per $x \rightarrow 0^-$

□

c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{x+1} - x^2}{x} = \underline{+\infty};$
 infinitesimo positivo
 per $x \rightarrow 0^+$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{x+1} - x^2}{x} \rightarrow \text{infinitesimo negativo} = \underline{-\infty};$
 per $x \rightarrow 0^-$

$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{(x-2)^3} = \underline{+\infty};$
 infinitesimo positivo
 per $x \rightarrow 2^+$

$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{(x-2)^3} = \underline{-\infty};$
 infinitesimo negativo
 per $x \rightarrow 2^-$

□

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^4 + x}{x^2 - 2x^4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4(3 + \frac{1}{x^3})}{x^4(\frac{1}{x^2} - 2)} = \underline{-\frac{3}{2}};$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^x - x}{2x + 2^x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(\frac{3^x}{x} - 1)}{x(2 - \frac{2^x}{x})} = \underline{-\frac{1}{2}};$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x} + 1}{e^{-2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 1}{e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x(1 + \frac{1}{e^x})}{e^x \cdot e^x} = \underline{0}.$

■

2) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 3^x & \text{se } x \leq -2 \\ -3x-2 & \text{se } -2 < x \leq 0 \\ -\frac{1}{x^2} & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ \log_{1/2}(x+1) & \text{se } x > 1; \end{cases}$$

i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 3^x = \underline{\underline{0}}$;

$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} 3^x = 3^{-2} = \underline{\underline{\frac{1}{9}}}$;

$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} (-3x-2) = 6-2 = \underline{\underline{4}}$;

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-3x-2) = \underline{\underline{-2}}$;

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \underline{\underline{-\infty}}$;

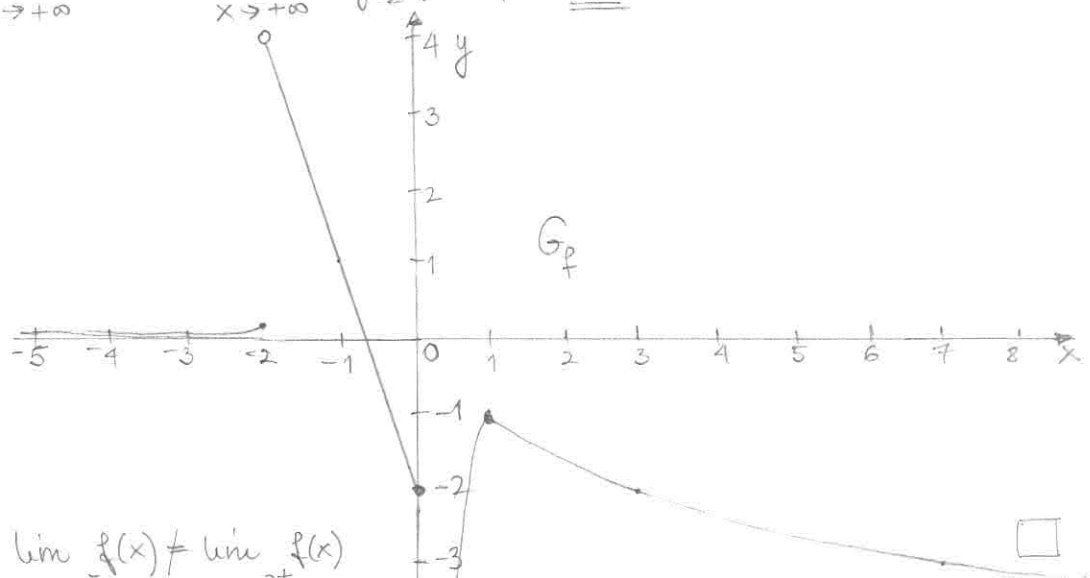
$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \underline{\underline{-1}}$;

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \log_{1/2}(x+1) = \log_{1/2} 2 = \underline{\underline{-1}}$;

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_{1/2}(x+1) = \underline{\underline{-\infty}}$.

□

ii)



iii) $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$

$x = -2$ pr. di discontinuità;

infatti $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$;

$x = 0$ pr. di discontinuità;

infatti $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$;

$f(0)$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -1 = f(1)$

$x = 1$ pr. di continuità di f .

Oss. che in tutti gli altri pr. del dominio f è continua. □

- w) $y=0$ asintoto orizzontale per f , per $x \rightarrow -\infty$;
 $x=0$ asintoto verticale per f . ■

$$3) i) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - x}{-x} = \underline{\underline{1}};$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x + x^2}{1 + e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x (1 + \frac{x^2}{3^x})}{e^x (\frac{1}{e^x} + 1)} = \underline{\underline{+\infty}} \quad (\text{poiché } \frac{3^x}{e^x} = (\frac{3}{e})^x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty, \frac{1}{e^x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{1 + 2^{-x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{1 + 2^x} = \underline{\underline{0}} \quad (x^2 \ll 2^x \text{ per } x \rightarrow +\infty);$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{4x} - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{4x} - 1}{4x} \cdot 2 = \underline{\underline{2}}; \quad \square$$

$$ii) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1}{x} \cdot \frac{1}{x} = \underline{\underline{-\infty}};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+2x)}{4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+2x)}{2x} \cdot \frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}};$$

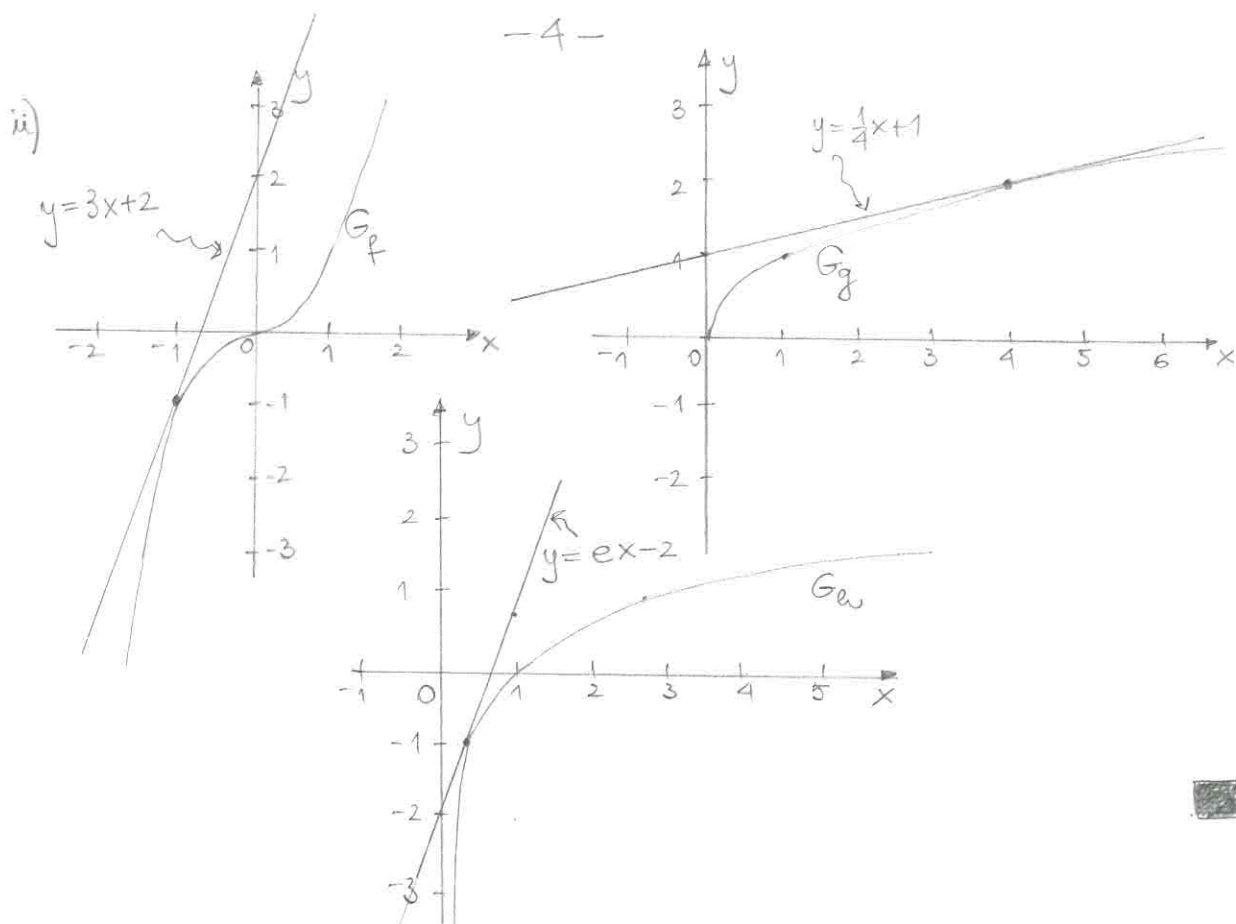
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(1+x^2)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(x^2(\frac{1}{x^2} + 1))}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\log x^2}{x} + \frac{\log(1 + \frac{1}{x^2})}{x} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[2 \frac{\log x}{x} + \frac{\log(1 + \frac{1}{x^2})}{x} \right] = \underline{\underline{0}}; \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+3x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+3x)}{3x} \cdot \frac{3}{2} = \underline{\underline{\frac{3}{2}}}. \quad \blacksquare$$

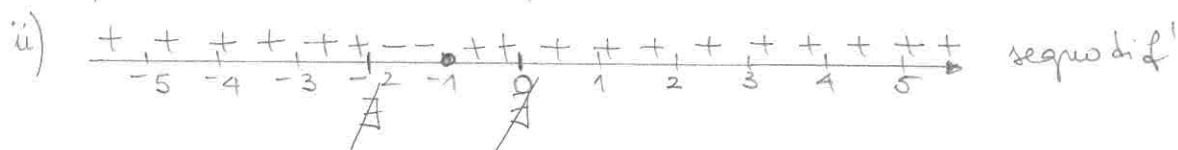
4) a) $f(x) = x^3 \quad (-1, -1) \quad f'(x) = 3x^2 \quad f'(-1) = 3 \quad f(-1) = -1$
 $y = -1 + 3(x+1) \quad \underline{\underline{y = 3x + 2}} \quad \text{retta tg. al grafico di } f \text{ in } (-1, -1).$

b) $g(x) = \sqrt{x} \quad (4, 2) \quad g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad g'(4) = \frac{1}{4} \quad g(4) = 2$
 $y = 2 + \frac{1}{4}(x-4) \quad \underline{\underline{y = \frac{1}{4}x + 1}} \quad \text{retta tg. al grafico di } f \text{ in } (4, 2).$

c) $h(x) = \log x \quad (\frac{1}{e}, -1) \quad h'(x) = \frac{1}{x} \quad h'(\frac{1}{e}) = e \quad h(\frac{1}{e}) = -1$
 $y = -1 + e(x - \frac{1}{e}) \quad \underline{\underline{y = ex - 2}} \quad \text{retta tg. al grafico di } f \text{ in } (\frac{1}{e}, -1).$



- 5) i) $y = -1$ asintoto orizzontale per f , per $x \rightarrow -\infty$;
 $x = -2$ asintoto verticale per f ;
 $x = 0$ asintoto verticale per f ;
 $y = x - 1$ asintoto obliquo per f , per $x \rightarrow +\infty$; □



6) a) $(3x^4 + 4x^{-1})' = 12x^3 - 4x^{-2}$;

$$\left(\frac{x^3-1}{x^2+1}\right)' = \frac{3x^2(x^2+1) - (x^3-1) \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4 + 3x^2 + 2x}{(x^2+1)^2};$$

$$\left(\frac{e^x-1}{2x}\right)' = \frac{e^x \cdot 2x - (e^x-1) \cdot 2}{(2x)^2} = \frac{2xe^x - 2e^x + 2}{4x^2};$$

$$\left(2\sqrt[3]{x} - x^{-1/4}\right)' = \frac{2}{3}x^{-2/3} + \frac{1}{4}x^{-5/4};$$
□

b) $\left(\log x + \frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$;

$$\left[3^x(x^2 + \sqrt{x})\right]' = (3^x \log 3)(x^2 + \sqrt{x}) + 3^x\left(2x + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right);$$

$$\left[(x^3-1)\left(\frac{1}{e^x} + \log_2 x\right)\right]' = 3x^2\left(\frac{1}{e^x} + \log_2 x\right) + (x^3-1)\left(-\frac{1}{e^x} + \frac{1}{x \log 2}\right);$$

$$\left(\frac{\log x}{x^2 - e^x}\right)' = \frac{\frac{1}{x} \cdot (x^2 - e^x) - (\log x)(2x - e^x)}{(x^2 - e^x)^2}$$
□