

Università degli Studi di Trento - Facoltà di Scienze Cognitive
 CdL in Scienze e Tecniche di Psicologia Cognitiva
 CdL in Interfacce e Tecnologie della Comunicazione - CdL in Filosofia
 ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA (CON ELEMENTI DI ALGEBRA)
 a.a. 2012-2013 - Rovereto, 14 febbraio 2013

FILA (A)

1) $x^2 + 4y^2 - 4x - 8y + 4 = 0$

$\underbrace{x^2 - 4x + 4}_{(x-2)^2} + \underbrace{4(y^2 - 2y)}_{4(y-1)^2} + 4 = 0$

$(x-2)^2 - 4 + 4(y-1)^2 - 4 + 4 = 0 \quad (x-2)^2 + 4(y-1)^2 = 4$, ossia

$\mathcal{E}: \frac{(x-2)^2}{4} + (y-1)^2 = 1$

$C = (2, 1) \quad a = 2, b = 1.$

$y = -2x^2 - 8x - 9$
 $= -2(x^2 + 4x) - 9$
 $= -2(x+2)^2 + 8 - 9$

$\mathcal{P}: y = -2(x+2)^2 - 1$

$V = (-2, -1).$

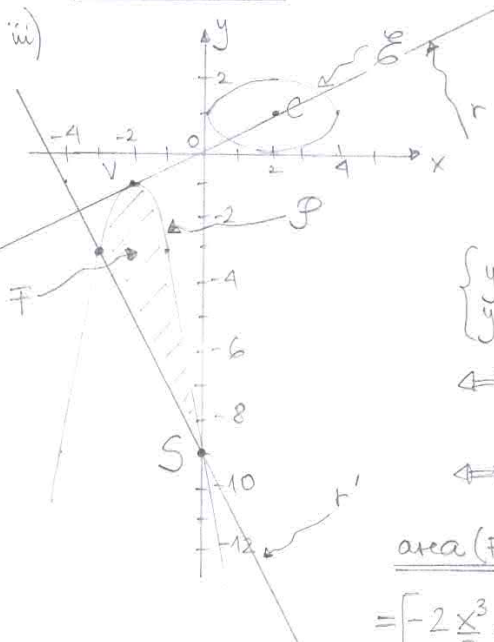
ii) $r: \frac{y-1}{-1-1} = \frac{x-2}{-2-2} \Leftrightarrow y-1 = \frac{1}{2}(x-2)$

ossia $y = \frac{1}{2}x.$



iii) $S = \text{pt. di intersezione della parabola } \mathcal{P} \text{ con l'asse } y$

$S = (0, -9).$ L'eq. di r' è $y = -9 - 2(x-0)$, ossia $y = -2x - 9.$



iv) Troviamo l'altro pt. di intersezione di r' con la parabola $\mathcal{P}$:

$\begin{cases} y = -2x - 9 \\ y = -2x^2 - 8x - 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x - 9 \\ -2x - 9 = -2x^2 - 8x - 9 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x - 9 \\ 2x^2 + 6x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x - 9 \\ 2x(x+3) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow (0, -9); (-3, -3)$. Allora

$\text{area}(F) = \int_{-3}^0 [(-2x^2 - 8x - 9) - (-2x - 9)] dx = \int_{-3}^0 (-2x^2 - 6x) dx$
 $= \left[-\frac{2x^3}{3} - 3x^2 \right]_{-3}^0 = 2\left(\frac{-3^3}{3}\right) + 3(-3)^2 = -2 \cdot 9 + 3 \cdot 9 = 9.$



2) i) $f(x) = e^{2x^2-3x}$

$f'(x) = e^{2x^2-3x} \cdot (4x-3)$

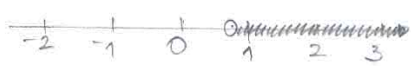
$g(x) = \log(3x^2+2x+1)$

$g(x) \leq 0 \Leftrightarrow 0 < 3x^2+2x+1 \leq 1$
 sempre vero!

$3x^2+2x \leq 0$
 $x(3x+2) \leq 0$

a) Quindi $A = \{x \in \mathbb{R} : f'(x) > 0\} =]\frac{3}{4}, +\infty[$;

$B = \{x \in \mathbb{R} : g(x) \leq 0\} = [-\frac{2}{3}, 0]$.



A



B

A e B sono intervalli!

b) $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = [-\frac{2}{3}, 0] \cup]\frac{3}{4}, +\infty[$, $A \setminus B = A$.

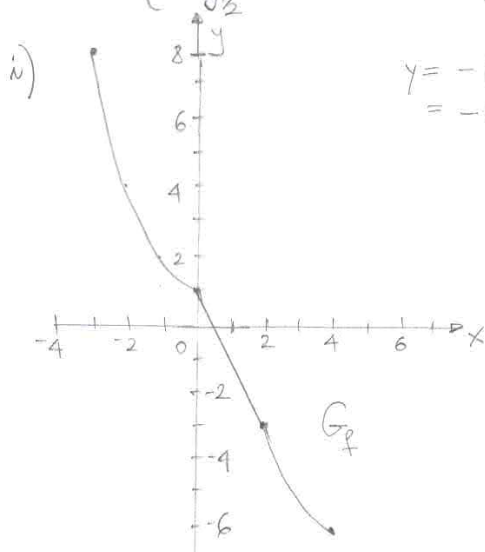
ii) $\sum_{n=1}^4 \int_1^2 x^{-n} dx = \left[\log|x| \right]_1^2 + \left[\frac{x^{-1}}{-1} \right]_1^2 + \left[\frac{x^{-2}}{-2} \right]_1^2 + \left[\frac{x^{-3}}{-3} \right]_1^2$
 $= \log 2 - \left(\frac{1}{2} - 1\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} - 1\right) - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{8} - 1\right)$
 $= \log 2 + \frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \frac{7}{24} = \log 2 + \frac{12+9+7}{24} = \log 2 + \frac{7}{6}$

3) $f: [-3, 4] \rightarrow \mathbb{R}$

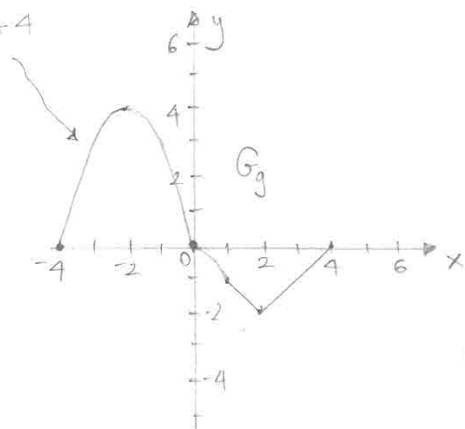
$f(x) = \begin{cases} (\frac{1}{2})^x & \text{se } -3 \leq x < 0 \\ -2x+1 & \text{se } 0 \leq x < 2 \\ 3 \log_{\frac{1}{2}} x & \text{se } 2 \leq x \leq 4; \end{cases}$

$g: [-4, 4] \rightarrow \mathbb{R}$

$g(x) = \begin{cases} -x^2-4x & \text{se } -4 \leq x \leq 0 \\ -x^2 & \text{se } 0 < x < 1 \\ |x-2|-2 & \text{se } 1 \leq x \leq 4. \end{cases}$



$y = -(x^2+4x) = -(x+2)^2 + 4$



ii) $f([-3, 4]) = [-6, 8]$;

$f^{-1}(1) = 0$

poiché $f(0) = 1$

$f^{-1}(-6) = 4$

poiché $f(4) = -6$.

$$\text{iii)} \quad \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{g(1+h) - g(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-(1+h)^2 + 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-1 - 2h - h^2 + 1}{h} = \underline{\underline{-2}}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{g(1+h) - g(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|1+h-2|-2+1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h-1|-1}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-h+1-1}{h} = \underline{\underline{-1}}.$$

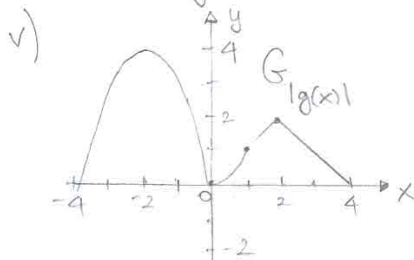
Risulta che g non è derivabile in x_0 , poiché i due limiti sopra sono diversi. $\square$

iv) g è continua su $[-4, 4]$: basta controllare la continuità di g nei pt. $x=0$ e $x=1$. Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x^2 - 4x) = 0 = g(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x^2).$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-x^2) = -1 = g(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (|x-2|-2).$$

Quindi g soddisfa le ipotesi del teorema di Weierstrass su $[-4, 4]$. $\square$

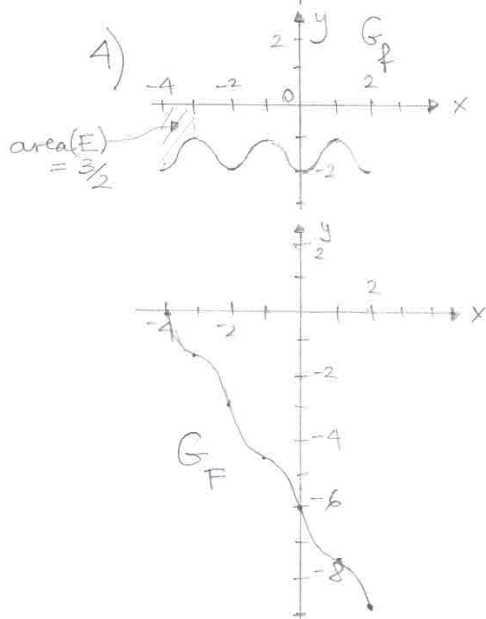


$$\min_{[-4, 4]} |g(x)| = 0$$

$x \in \{-4, 0, 4\}$ pt. di minimo di $|g(x)|$ su $[-4, 4]$;

$$\max_{[-4, 4]} |g(x)| = 4$$

$x = -2$ pt. di massimo di $|g(x)|$ su $[-4, 4]$. $\blacksquare$



i)

$$f(x) = F'(x) \quad \text{per il teorema fond. del calcolo integrale}$$

$$f'(x) = F''(x)$$

UNUNUN F

$$F(2) = \int_{-4}^2 f(t) dt = -9$$

$$(F(-3) = \int_{-4}^{-3} f(t) dt = -\text{area}(E) = -\frac{3}{2},$$

$$F(-2) = \int_{-4}^{-2} f(t) dt = -2 \text{ area}(E) = -3 \dots) \quad \blacksquare$$

5) $f(x) = \frac{x^4 - 4x^3}{e^x}$ i) • $\text{dom } f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$ ($e^x > 0 \forall x \in \mathbb{R}$)

• segno di f

x^4	+	+	+	+	+	+	+	+	+
$x^4 - 4x^3$	+	+	+	+	+	+	+	+	+
$x^3(x-4)$	+	+	+	+	+	+	+	+	+

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ $y=0$ asintoto orizzontale per $x \rightarrow +\infty$

• f è continua in $\mathbb{R}$, poiché rapporto di funzioni continue e il denominatore non si annulla mai.

• $\text{dom } f' = \mathbb{R}$ $f'(x) = \frac{(4x^3 - 12x^2)e^x - (x^4 - 4x^3)e^x}{e^{2x}} = \frac{-x^4 + 8x^3 - 12x^2}{e^x}$
 $= \frac{x^2(-x^2 + 8x - 12)}{e^x}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x=0$ o $-x^2 + 8x - 12 = 0$
 $x_{1/2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 48}}{-2} = \frac{-8 \pm \sqrt{16}}{-2} = \frac{-8 \pm 4}{-2} \begin{cases} 6 \\ 2 \end{cases}$

$x=2$ pt. di min. loc. stretto

x^2	+	+	+	+	+	+	+	+	+
$-x^2 + 8x - 12$	+	+	+	+	+	+	+	+	+
$f'(x)$	+	+	+	+	+	+	+	+	+

$f(2) = \frac{16 - 32}{e^2} = -\frac{16}{e^2} \sim -2$

$x=6$ pt. di max. loc. stretto

$f(6) = \frac{1296 - 864}{e^6} = \frac{432}{e^6} \sim 1$

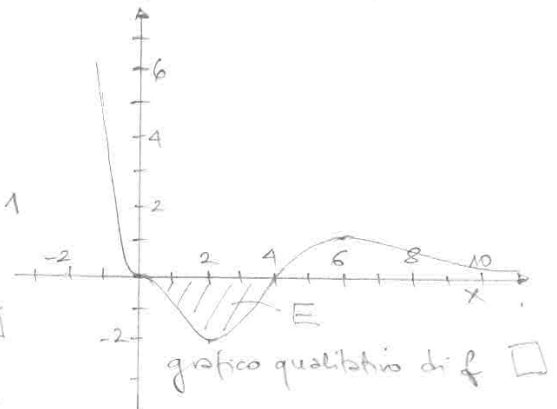
ii) $y=0$ retta tang. al grafico di f in $(0,0)$ ☐

iii) $F(x) = -x^4 e^{-x}$ è derivabile in $\mathbb{R}$ e ☐

$F'(x) = -4x^3 e^{-x} + x^4 e^{-x} = \frac{x^4 - 4x^3}{e^x} = f(x) \forall x \in \mathbb{R}$ ☐

iv) $\text{area}(E) = \int_0^4 (0 - f(x)) dx = \left[-F(x) \right]_0^4 = \left[+\frac{x^4}{e^x} \right]_0^4 = \frac{16^2}{e^4}$ ☒

6) A : $\checkmark$ F
 $\text{non } A$: $\checkmark$ $\checkmark$
 $A \text{ o } (\text{non } A)$: $\checkmark$ $\checkmark$ $\leftarrow$ " $A \text{ o } (\text{non } A)$ " è una tautologia. ☒



FILA (B)

1) $4x^2 + y^2 + 8x - 4y + 4 = 0$

$\underbrace{4x^2 + 8x}_{4(x+1)^2 - 4} + \underbrace{y^2 - 4y}_{(y-2)^2 - 4} + 4 = 0$ $4(x+1)^2 + (y-2)^2 = 4$, ossia

$\mathcal{C}: \frac{(x+1)^2}{1} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$

$C = (-1, 2)$ $a=1$, $b=2$.

$y = -2x^2 + 8x - 9$
 $= -2(x^2 - 4x) - 9$
 $= -2(x-2)^2 + 8 - 9$

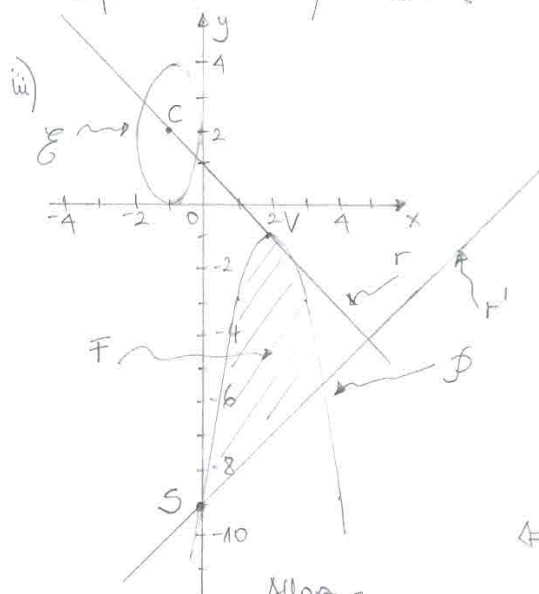
$\mathcal{P}: y = -2(x-2)^2 - 1$ $V = (2, -1)$.

i) r: $\frac{y-2}{-1-2} = \frac{x+1}{2+1} \Leftrightarrow y-2 = -(x+1)$, ossia

$y = -x + 1$. $\square$

ii) $S =$ pr. di intersezione della parabola $\mathcal{P}$ con l'asse $y = (0, -9)$.

L'eq. di r' è $y = -9 + (x-0)$, ossia $y = x - 9$. $\square$



iv) Troviamo l'altro punto d'intersezione di r' con la parabola $\mathcal{P}$:

$\begin{cases} y = x - 9 \\ y = -2x^2 + 8x - 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 9 \\ -2x^2 + 8x - 9 = x - 9 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 9 \\ 2x^2 - 7x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x(2x - 7) = 0$

$\Leftrightarrow (0, -9); \left(\frac{7}{2}, -\frac{11}{2}\right)$.

Allora $\frac{7}{2}$

$\text{area}(F) = \int_0^{\frac{7}{2}} [(-2x^2 + 8x - 9) - (x - 9)] dx = \int_0^{\frac{7}{2}} [-2x^2 + 7x] dx$

$= \left[-\frac{2}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 \right]_0^{\frac{7}{2}} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{49 \cdot 7}{8} + \frac{7}{2} \cdot \frac{49}{4} = \frac{7}{6} \cdot \frac{49}{4} = \frac{343}{24}$



$$2) i) f(x) = e^{-2x^2+3x} \quad f'(x) = e^{-2x^2+3x} \cdot (-4x+3)$$

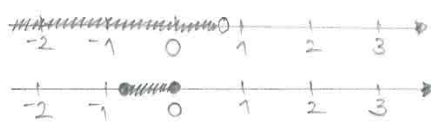
$$g(x) = \log(4x^2+3x+1) \quad g(x) \leq 0 \Leftrightarrow 0 < 4x^2+3x+1 \leq 1$$

sempre vero!
 $4x^2+3x \leq 0$
 $x(4x+3) \leq 0$

$$2) \text{ Quindi } A = \{x \in \mathbb{R} : f'(x) > 0\} =$$

$$= \underline{\underline{]-\infty, \frac{3}{4}[}}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} : g(x) \leq 0\} = \underline{\underline{[-\frac{3}{4}, 0]}}$$



$$A = A$$

$$B = B$$

A e B sono intervalli!

□

$$b) \underline{\underline{A \cap B = B}} \quad \underline{\underline{A \cup B = A}} \quad \underline{\underline{A \setminus B =]-\infty, -\frac{3}{4}[\cup]0, \frac{3}{4}[}}$$

$$ii) \sum_{i=1}^4 \int_1^3 x^{-i} dx = \left[\log|x| \right]_1^3 + \left[\frac{x^{-1}}{-1} \right]_1^3 + \left[\frac{x^{-2}}{-2} \right]_1^3 + \left[\frac{x^{-3}}{-3} \right]_1^3$$

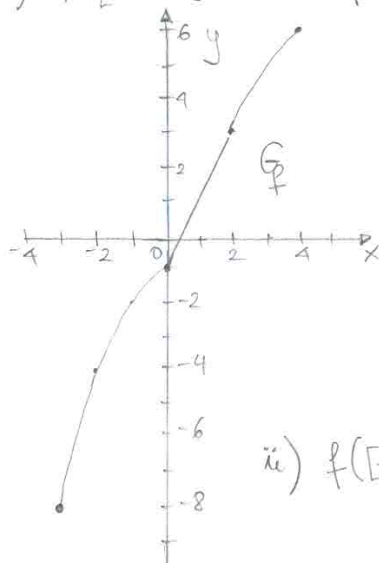
$$= \log 3 - \left(\frac{1}{3} - 1 \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{9} - 1 \right) - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{27} - 1 \right)$$

$$= \log 3 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{26}{27} = \log 3 + \frac{54+36+26}{27 \cdot 3} =$$

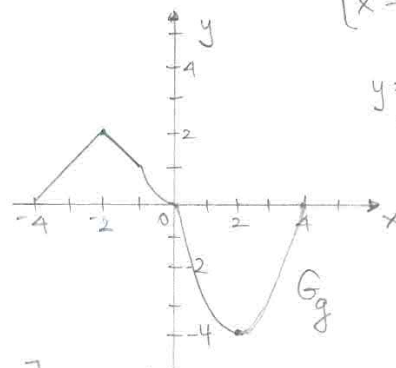
$$= \log 3 + \frac{116}{81}$$

■

$$3) f: [-3, 4] \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} -\left(\frac{1}{2}\right)^x & \text{se } -3 \leq x < 0 \\ 2x-1 & \text{se } 0 \leq x < 2 \\ 3 \log_2 x & \text{se } 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$$



$$g: [-4, 4] \rightarrow \mathbb{R} \quad g(x) = \begin{cases} -|x+2|+2 & \text{se } -4 \leq x \leq -1 \\ x^2 & \text{se } -1 < x \leq 0 \\ x^2-4x & \text{se } 0 < x \leq 4 \end{cases}$$



$$y = x^2 - 4x = (x-2)^2 - 4$$

$$ii) \underline{\underline{f([-3, 4]) = [-8, 6]}}$$

$$\underline{\underline{f^{-1}(-8) = -3}}, \text{ poich\u00e9 } f(-3) = -8$$

$$\underline{\underline{f^{-1}(3) = 2}}, \text{ poich\u00e9 } f(2) = 3$$

□

□

- 7 -

$$\text{iii) } \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{g(-1+h) - g(-1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-|-1+h+2|+1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-|h+1|+1}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h-1+1}{h} = \underline{\underline{-1}} ;$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{g(-1+h) - g(-1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(-1+h)^2 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1-2h+h^2-1}{h} = \underline{\underline{-2}}.$$

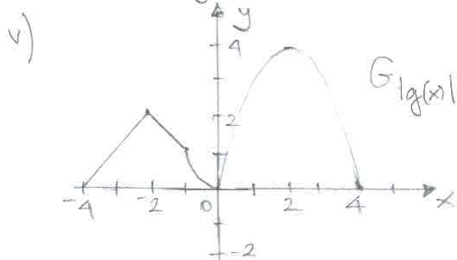
Risulta che g non è derivabile in $x_0 = -1$, poiché i due limiti sopra sono diversi. $\square$

iv) g è continua in $[-4, 4]$: basta controllare la continuità di g nei punti $x = -1$ e $x = 0$. Si ha

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} (-|x+2|+2) = 1 = g(-1) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} x^2.$$

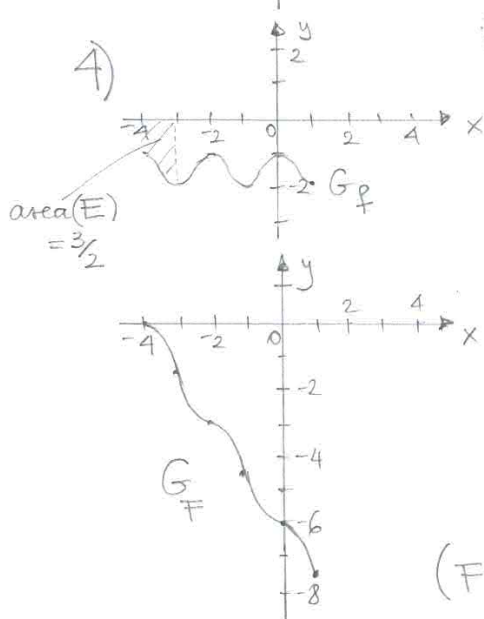
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 = 0 = g(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 - 4x).$$

Quindi g soddisfa le ipotesi del teorema di Weierstrass in $[-4, 4]$. $\square$



$$\min_{[-4, 4]} |g(x)| = 0 \quad x \in \{-4, 0, 4\} \text{ pt. di minimo di } |g| \text{ su } [-4, 4];$$

$$\max_{[-4, 4]} |g(x)| = 4 \quad x = 2 \text{ pt. di massimo di } |g| \text{ su } [-4, 4].$$



i)

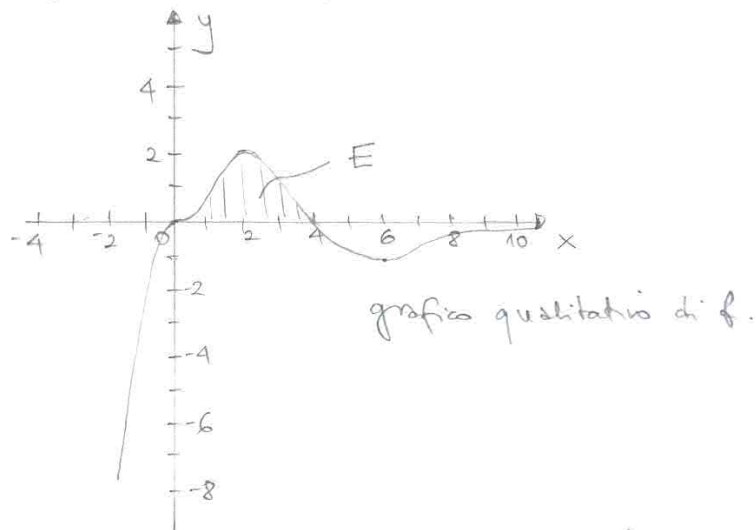
$$F(1) = 5 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = \underline{\underline{-\frac{15}{2}}}$$

$$(F(-3) = \int_{-3}^{-3} f(t) dt = -\text{area}(E) = -\frac{3}{2},$$

$$F(-2) = \int_{-2}^{-2} f(t) dt = -2 \text{ area}(E) = -3, \dots)$$

- 5) $f(x) = \frac{4x^3 - x^4}{e^x}$ i) Questa funzione è $-\left(\frac{x^4 - 4x^3}{e^x}\right) = -$ la funzione studiata in Es. 5, FILA (A).

Il suo grafico risulta quindi



- ii) $y=0$ retta tangente al grafico di f in $(0,0)$.

- iii) $F(x) = x^4 e^{-x}$ è derivabile in $\mathbb{R}$ e

$$F'(x) = 4x^3 e^{-x} - x^4 e^{-x} = \frac{4x^3 - x^4}{e^x} = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

iv) $\text{area}(E) = \int_0^4 f(x) dx = [F(x)]_0^4 = \left[\frac{x^4}{e^x} \right]_0^4 = \frac{16^2}{e^4}$

6)

A :	V	F
$\text{non } A$:	F	V
$A \text{ e } (\text{non } A)$:	F	F

$\text{non } [A \text{ e } (\text{non } A)]$: V V $\leftarrow$ "non $[A \text{ e } (\text{non } A)]$ " è una tautologia.