

COGNOME _____
NOME _____
MATRICOLA

--	--	--	--	--	--

NON SCRIVERE QUI

1	2	3	4	5
---	---	---	---	---

A

UNIVERSITÀ DI TRENTO — FACOLTÀ DI SCIENZE COGNITIVE

CdL IN SCIENZE E TECNICHE DI PSICOLOGIA COGNITIVA
CdL IN INTERFACCE E TECNOLOGIE DELLA COMUNICAZIONE
CdL IN FILOSOFIA

PRIMA PROVA INTERMEDIA DI ANALISI MATEMATICA (CON ELEMENTI DI ALGEBRA)

A.A. 2012-2013 — ROVERETO, 30 OTTOBRE 2012

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **DUE ORE E MEZZA**.

IL SUPERAMENTO DEI PRIMI 10 ESERCIZI È CONDIZIONE NECESSARIA PERCHÈ LA SECONDA PARTE DEL COMPITO VENGA VALUTATA. LE RISPOSTE DI QUESTE DEVONO ESSERE RIPORTATE SU QUESTO FOGLIO.

Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.

È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.

Potete usare solo il vostro materiale di scrittura e il vostro materiale di studio. Non usate il colore rosso.

a1) Siano dati gli insiemi $A =] - \infty, 2[$ e $B = \{-3\} \cup [1, 4]$. Determinate l'insieme $A \setminus B$.

Risposta:

$$A \setminus B =] - \infty, 1[\setminus \{-3\} =] - \infty, -3[\cup] - 3, 1[$$

a2) Sia $A =] - 2, 4[\cup \{5\}$. Dite quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali sono false:

(i) $\min A = -2$; (ii) $\{3\} \in \mathcal{P}(A)$; (iii) A è un intervallo; (iv) A è limitato.

Risposta:

i) F ii) V iii) F iv) V

a3) Scrivete la negazione della seguente proposizione: " $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{Z} : x + y = 0$ ".

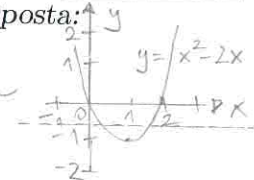
Risposta:

$$"\exists x \in \mathbb{N} : \forall y \in \mathbb{Z}, x + y \neq 0"$$

a4) Determinate tutti gli $a \in \mathbb{R}$ tali che l'equazione $x^2 - 2x = a$ ha almeno una soluzione.

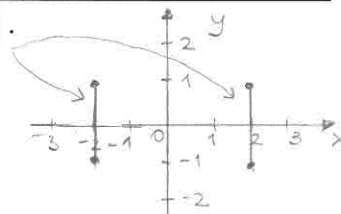
Risposta:

$(x-1)^2 - 1 = a$


$$x^2 - 2x - a = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4a}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{1+a}}{2}$$
$$1 + a \geq 0 \Rightarrow a \in [-1, +\infty[$$

a5) Rappresentate graficamente $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 = 4, y^2 \leq 1\}$.

Risposta:



a6) Scrivete l'equazione della retta r di pendenza $m = -2$ e passante per il punto $P = (-1, 2)$.

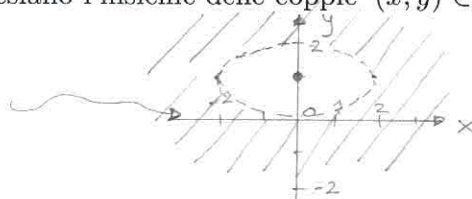
Risposta:

$$y = 2 - 2(x + 1) \Rightarrow \underline{y = -2x}$$

a7) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano l'insieme delle coppie $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ soddisfacenti $x^2 + 4(y - 1)^2 > 4$.

Risposta:

$$\frac{x^2}{4} + (y - 1)^2 > 1$$

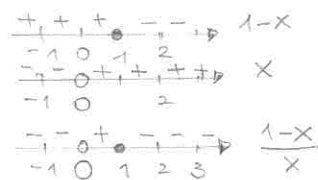


a8) Risolvete la seguente disequazione $\frac{x+1}{x} < 2$.

Risposta:

$$\frac{x+1-2x}{x} < 0 \Leftrightarrow \frac{1-x}{x} < 0$$

$$\underline{S =]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[}$$

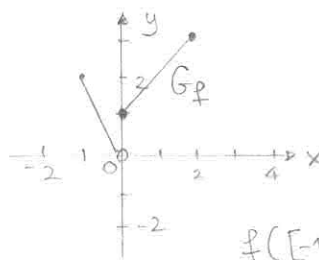


a9) Sia $f : [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} -2x & \text{se } -1 \leq x < 0 \\ x + 1 & \text{se } 0 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Determinate l'immagine di f .

Risposta:



$$\underline{f([-1, 2]) = [0, 3]}$$

a10) Siano $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ le funzioni definite da

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{1}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases} \quad g(x) = x^3 + 1.$$

Determinate $(f + g)(1)$ e $(fg)(-2)$.

Risposta:

$$(f + g)(1) \doteq f(1) + g(1) = 1 + 2 = \underline{3}$$

$$(fg)(-2) \doteq f(-2) \cdot g(-2) = 3 \cdot (-7) = \underline{-21}$$

Università degli Studi di Trento - Facoltà di Scienze Cognitive
 CdL in Scienze e Tecniche di Psicologia Cognitiva
 CdL in Interfacce e Tecnologie della Comunicazione - CdL in Filosofia
 PRIMA PROVA INTERMEDIA DI ANALISI MATEMATICA (CON ELEMENTI DI ALGEBRA)
 a.a. 2012-2013 - Rovereto, 30 ottobre 2012

FILA (A)

b1) i) A: V V F F

B: V F V F

$A \leftrightarrow B$: V F F F

non A: F F V V

non B: F V F V

non A o non B: F V V V

non(non A o non B): V F F F

le due proposizioni sono equivalenti.



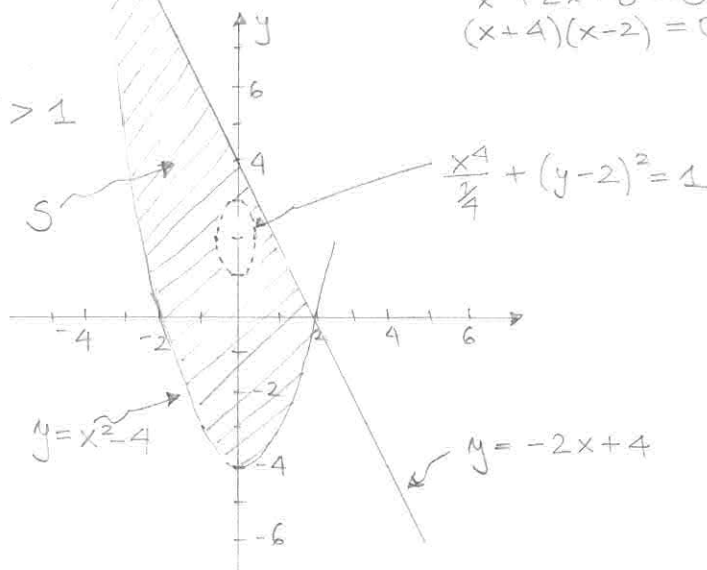
ii) $A(x,y)$ = "Nella settimana x lo studente y del CdL in STPC consegna la verifica settimanale in ritardo".

La proposizione data si scrive quindi: " $\forall x, \exists y: A(x,y)$ ".



b2) i)
$$\begin{cases} y \geq x^2 - 4 \\ y \leq -2x + 4 \\ \frac{x^2}{\frac{1}{4}} + (y-2)^2 > 1 \end{cases}$$

Osserviamo che $x^2 - 4 = -2x + 4 \iff$
 $x^2 + 2x - 8 = 0 \iff$
 $(x+4)(x-2) = 0 \iff$
 $x_1 = -4$
 $x_2 = 2$



ii) $y = k$ con $k \in]-\infty, -4[\cup]12, +\infty[$.



b3) i) $x^2 - 4y^2 - 2x - 16y - 19 = 0$

$x^2 - 2x - 4(y^2 + 4y) - 19 = 0$

$(x-1)^2 - 1 - 4(y+2)^2 + 16 - 19 = 0$

$$(x-1)^2 - 4(y+2)^2 = 4$$

$$\frac{(x-1)^2}{4} - (y+2)^2 = 1$$

$$C = (1, -2)$$

$$a = 2$$

$$b = 1$$



- ii) $y = -2x$; questa retta non interseca mai l'iperbole in i) poiché il sistema
- $$\begin{cases} \frac{(x-1)^2}{4} - (y+2)^2 = 1 \\ y = -2x \end{cases}$$
- non ha soluzione.

In fatti, sostituendo la 2^a eq. nella 1^a eq. si ha

$$\frac{(x-1)^2}{4} - (-2x+2)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \frac{(x-1)^2}{4} - 4(x-1)^2 = 1$$

$$\Rightarrow -\frac{15}{4}(x-1)^2 = 1$$

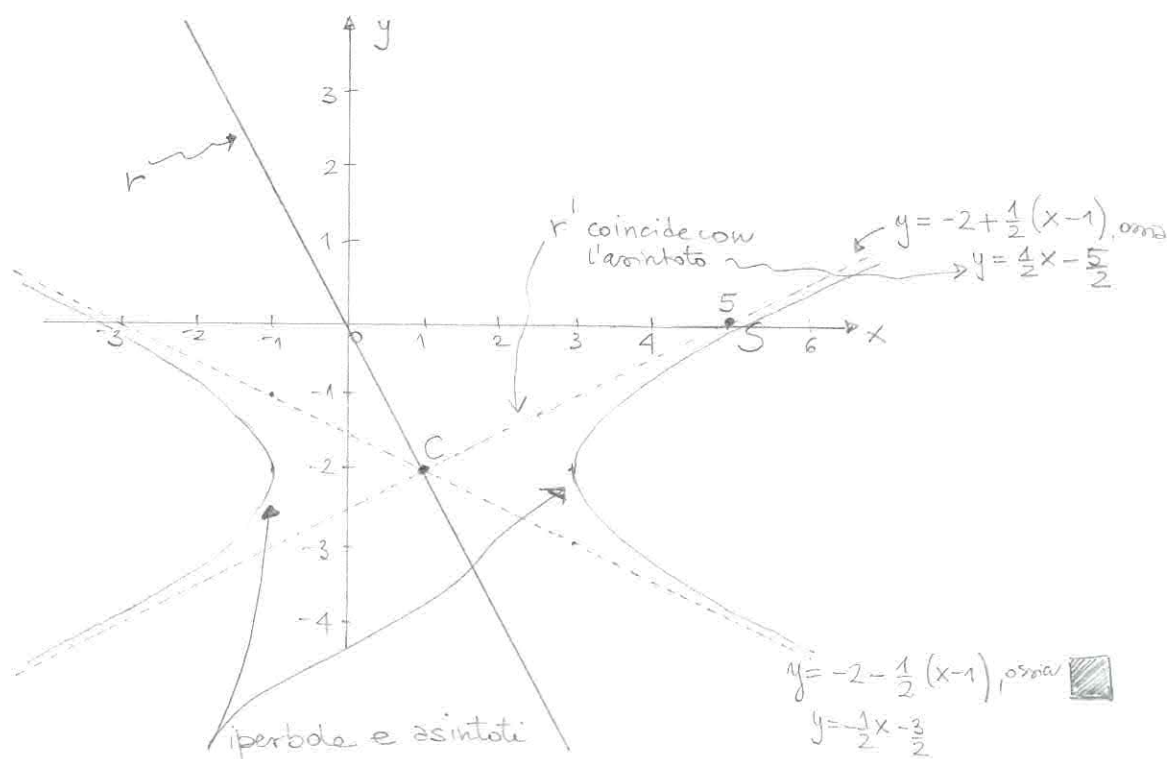
che non è possibile (un numero ≤ 0 non può essere uguale a 1).

- iii) r' ha pendenza $m = \frac{1}{2}$; l'eq. di r' diventa quindi

$$y = -2 + \frac{1}{2}(x-1), \text{ ossia } \underline{\underline{y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}}}$$

Punto di intersezione di tale retta con l'asse delle x è $S = (5, 0)$.

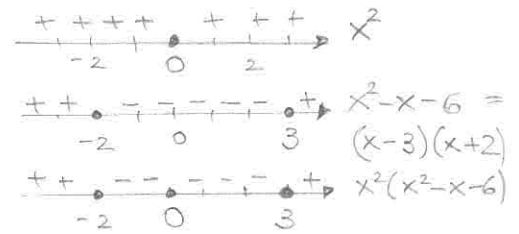
iv)



b4) i) $A = \{x \in \mathbb{R} : \frac{x^2(x^2 - x - 6)}{x^2 + 1} < 0\}$

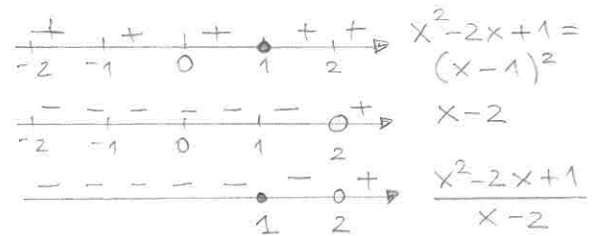
oss. $x^2 + 1 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$

$A =]-2, 3[\setminus \{0\}$.

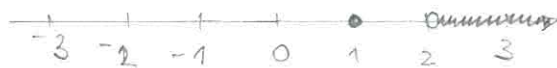


$B = \{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{x-2} + x \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : \frac{x^2 - 2x + 1}{x-2} \geq 0\}$

$= \{1\} \cup]2, +\infty[$.



$m = A$



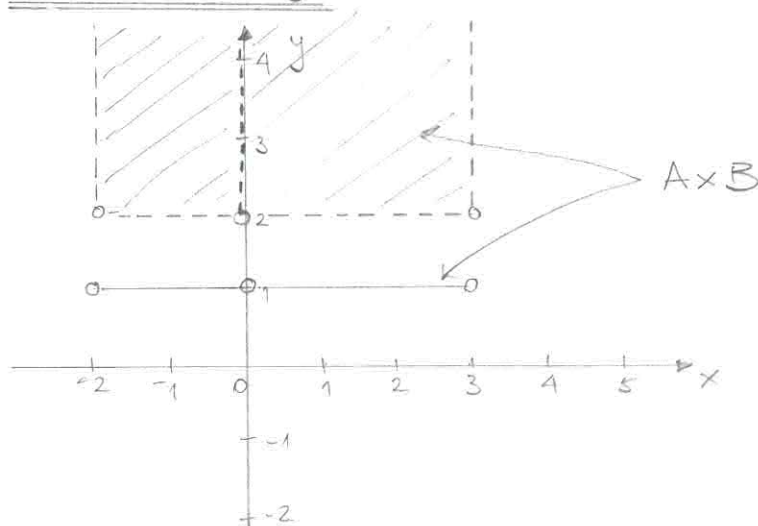
$m = B$

A è limitato ; B non è limitato (non essendo limitato superiormente) □

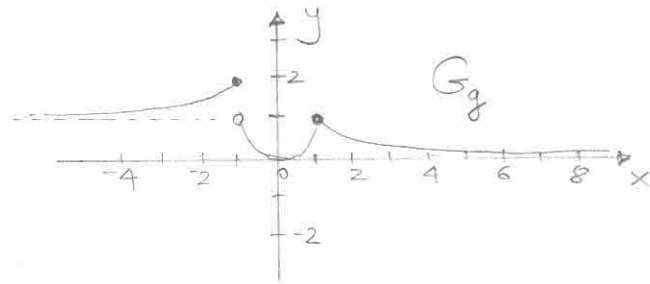
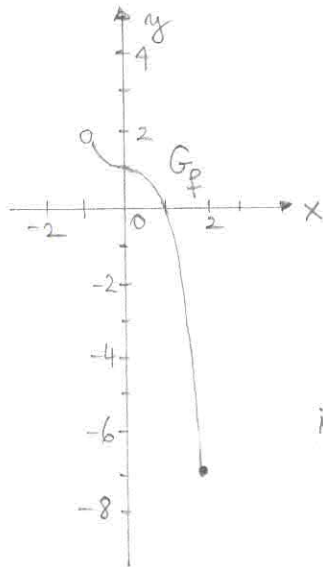
ii) $A \cap B = \{1\} \cup]2, 3[$. $\Rightarrow A$ e B non sono disgiunti.

$\mathbb{R} \setminus B =]-\infty, 2] \setminus \{1\}$. □

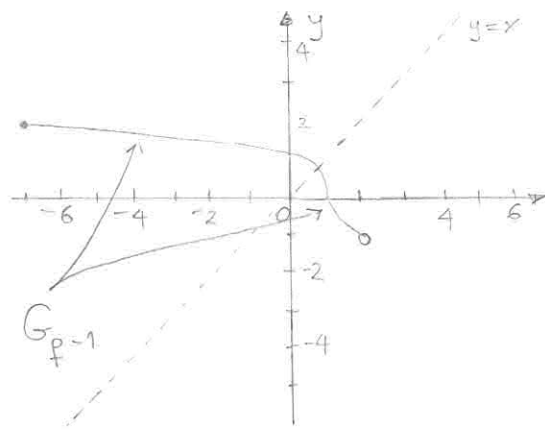
iii)



b5) i)



ii)

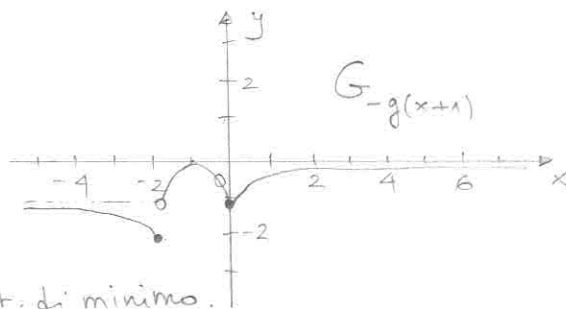


iii) $g(\mathbb{R}) = [0, 2]$.

g non è suriettiva, poiché $g(\mathbb{R}) \subsetneq \mathbb{R}$.

iv) g non è iniettiva; infatti ogni retta orizzontale $y=k$ con $0 < k < 1$ interseca il grafico di g in tre punti; quindi $\exists$ sono $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ con $x_1 \neq x_2$ e $g(x_1) = g(x_2)$; per esempio $g(-\frac{1}{2}) = g(\frac{1}{2}) = \frac{1}{16}$.

v) $x \mapsto -g(x+1)$
 $\nearrow$
 $\mathbb{R}$



vi) $\min_{\mathbb{R}} g = 0$

$x=0$ pt. di minimo.

$\max_{\mathbb{R}} g = 2$

$x=-1$ pt. di massimo.

vii) $(f \circ g)(-1) = f(g(-1)) = f(2) = -7$.