

COGNOME _____ NOME _____ MATRICOLA <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center; width: 100px;"> <tr> <td style="width: 15px; height: 15px;"></td> <td style="width: 15px; height: 15px;"></td> <td style="width: 15px; height: 15px;"></td> <td style="width: 15px; height: 15px;"></td> <td style="width: 15px; height: 15px;"></td> <td style="width: 15px; height: 15px;"></td> </tr> </table>							NON SCRIVERE QUI <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center; width: 150px;"> <tr> <td style="width: 20px; height: 15px;"></td> <td style="width: 20px; height: 15px;"></td> <td style="width: 20px; height: 15px;"></td> <td style="width: 20px; height: 15px;"></td> <td style="width: 20px; height: 15px;"></td> </tr> <tr> <td style="font-size: 8px;">1</td> <td style="font-size: 8px;">2</td> <td style="font-size: 8px;">3</td> <td style="font-size: 8px;">4</td> <td style="font-size: 8px;">5</td> </tr> </table> <div style="border: 1px solid black; width: 100px; height: 100px; margin-top: 10px; position: relative;"> D </div>						1	2	3	4	5
1	2	3	4	5													

UNIVERSITÀ DI TRENTO — FACOLTÀ DI SCIENZE COGNITIVE

CdL IN SCIENZE E TECNICHE DI PSICOLOGIA COGNITIVA
 CdL IN INTERFACCE E TECNOLOGIE DELLA COMUNICAZIONE
 CdL IN FILOSOFIA

PRIMA PROVA INTERMEDIA DI ANALISI MATEMATICA (CON ELEMENTI DI ALGEBRA)

A.A. 2012-2013 — ROVERETO, 30 OTTOBRE 2012

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **DUE ORE E MEZZA**.

IL SUPERAMENTO DEI PRIMI 10 ESERCIZI È CONDIZIONE NECESSARIA PERCHÈ LA SECONDA PARTE DEL COMPITO VENGA VALUTATA. LE RISPOSTE DI QUESTE DEVONO ESSERE RIPORTATE SU QUESTO FOGLIO.

Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.

È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.

Potete usare solo il vostro materiale di scrittura e il vostro materiale di studio. Non usate il colore rosso.

a1) Siano dati gli insiemi $A =]3, +\infty[$ e $B = [1, 4] \cup \{5\}$. Determinate l'insieme $A \setminus B$.

Risposta:

$$A \setminus B = \underline{\underline{]4, +\infty[\setminus \{5\} =]4, 5[\cup]5, +\infty[}}$$

a2) Sia $A =]-1, 4[\cup \{5\}$. Dite quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali sono false:

(i) $\max A = 5$; (ii) $\{-1\} \in \mathcal{P}(A)$; (iii) A è un intervallo; (iv) A è limitato.

Risposta:

i) \checkmark ii) \times iii) \times iv) \checkmark

a3) Scrivete la negazione della seguente proposizione: " $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{Q} : x + 2y = 0$ ".

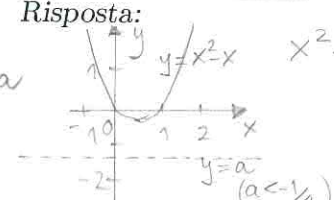
Risposta:

" $\exists x \in \mathbb{N} : \forall y \in \mathbb{Q}, x + 2y \neq 0$ "

a4) Determinate tutti gli $a \in \mathbb{R}$ tali che l'equazione $x^2 - x = a$ non ha soluzioni.

Risposta:

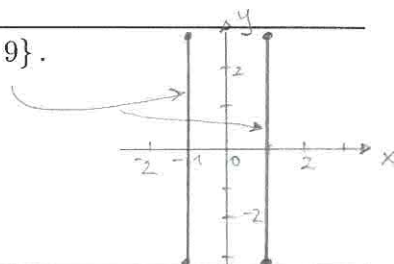
$(x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} = a$



$x^2 - x - a = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4a}}{2}$
 $1 + 4a < 0 \Rightarrow \underline{\underline{a \in]-\infty, -\frac{1}{4}[}}$

a5) Rappresentate graficamente $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 = 1, y^2 \leq 9\}$.

Risposta:



a6) Scrivete l'equazione della retta r di pendenza $m = -2$ e passante per il punto $P = (1, 2)$.

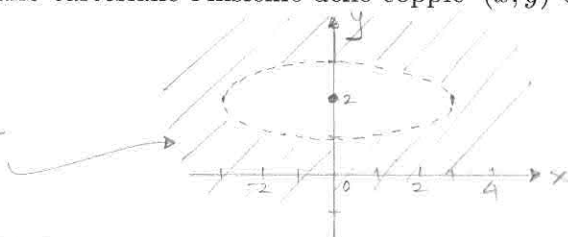
Risposta:

$$y = 2 - 2(x - 1) \Rightarrow \underline{y = -2x + 4}$$

a7) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano l'insieme delle coppie $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ soddisfacenti $x^2 + 9(y - 2)^2 > 9$.

Risposta:

$$\frac{x^2}{9} + (y - 2)^2 > 1$$



a8) Risolvete la seguente disequazione $\frac{x+1}{x} < 3$.

Risposta:

$$\frac{x+1-3x}{x} < 0$$

$$\frac{1-2x}{x} < 0$$

$$\underline{S =]-\infty, 0[\cup]\frac{1}{2}, +\infty[}$$

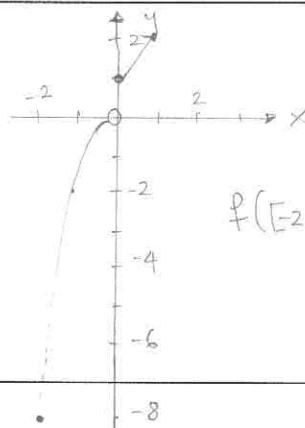


a9) Sia $f : [-2, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} -2x^2 & \text{se } -2 \leq x < 0 \\ x+1 & \text{se } 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Determinate l'immagine di f .

Risposta:



$$\underline{f([-2, 1]) = [-8, 0[\cup [1, 2]}$$

a10) Siano $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ le funzioni definite da

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^3 & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{1}{x^2} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$$g(x) = x^2 + 1.$$

Determinate $(f+g)(1)$ e $(fg)(-1)$.

Risposta:

$$(f+g)(1) \doteq f(1) + g(1) = 1 + 2 = \underline{3}$$

$$(fg)(-1) \doteq f(-1) \cdot g(-1) = 2 \cdot 2 = \underline{4}$$

FILA (D)

b1) i) $P: V \quad V \quad F \quad F$

$Q: V \quad F \quad V \quad F$

$P \vee Q: V \quad F \quad F \quad F$

$\neg P: F \quad F \quad V \quad V$

$\neg Q: F \quad V \quad F \quad V$

$\neg P \vee \neg Q: F \quad V \quad V \quad V$

$\neg(\neg P \vee \neg Q): V \quad F \quad F \quad F$

Le due proposizioni sono equivalenti.



ii) $A(x,y) = \text{"Nella settimana } x \text{ la fabbrica italiana } y \text{ è in agitazione per sciopero"}$

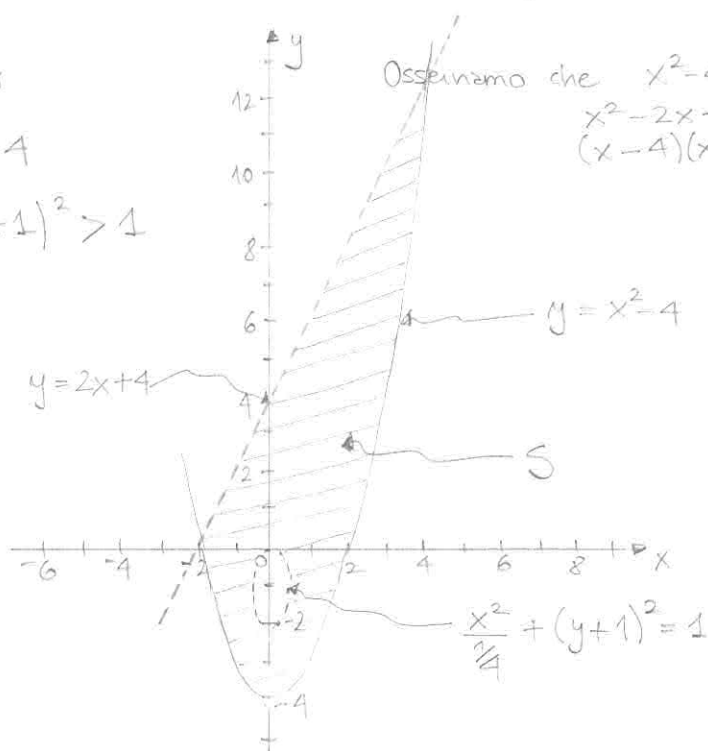
La proposizione data si scrive quindi: $\forall x, \exists y: A(x,y)$



b2) i) $y \geq x^2 - 4$

$y < 2x + 4$

$\frac{x^2}{\frac{1}{4}} + (y+1)^2 > 1$



ii) $y = k$ con $k \in]-\infty, -4[\cup [12, +\infty[$



b3) i) $x^2 - 4y^2 + 2x + 16y - 19 = 0$

$x^2 + 2x - 4(y^2 - 4y) - 19 = 0$

$(x+1)^2 - 1 - 4(y-2)^2 + 16 - 19 = 0$

$(x+1)^2 - 4(y-2)^2 = 4$

$\frac{(x+1)^2}{4} - (y-2)^2 = 1$

$C = (-1, 2)$

$a=2$
 $b=1$



- ii) $y = -2x$; questa retta non interseca mai l'iperbole in i) poiché il sistema
- $$\begin{cases} \frac{(x+1)^2}{4} - (y-2)^2 = 1 \\ y = -2x \end{cases}$$
- non ha soluzioni.

In fatti, sostituendo la 2^a eq. nella 1^a eq. mi dà

$$\begin{aligned} \frac{(x+1)^2}{4} - (-2x-2)^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{(x+1)^2}{4} - 4(x+1)^2 &= 1 \\ \Rightarrow -\frac{15}{4}(x+1)^2 &= 1 \end{aligned}$$

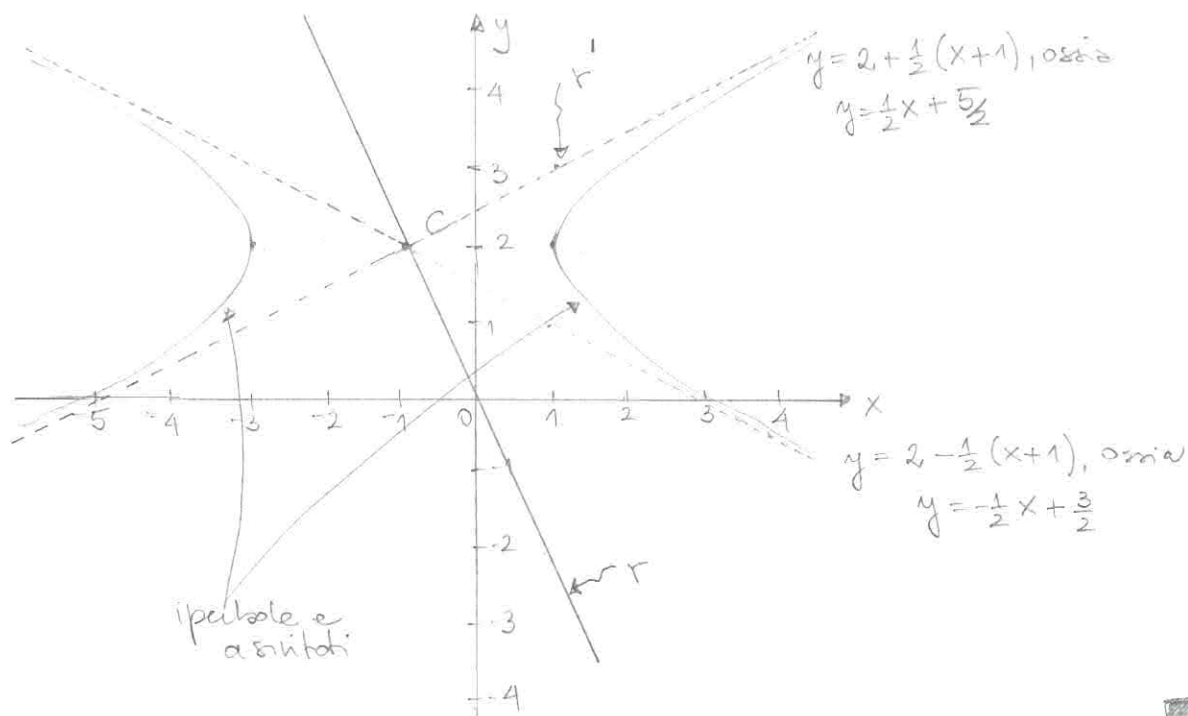
che non è possibile (un numero ≤ 0 non può essere uguale ad 1). \square

- iii) r' ha pendenza $m = \frac{1}{2}$; l'eq. di r' diventa quindi

$$y = 2 + \frac{1}{2}(x+1), \text{ ossia } \underline{y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}}.$$

Punto di intersezione di tale retta con l'asse delle x è $S = (-5, 0)$. \square

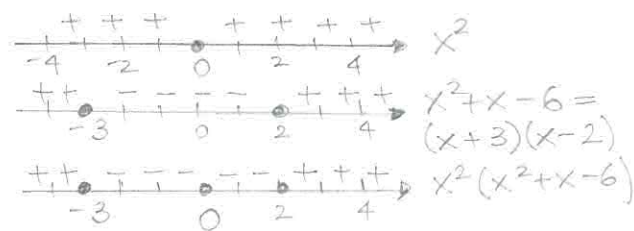
iv)



b4) i) $A = \{x \in \mathbb{R} : \frac{x^2(x^2+x-6)}{x^2+1} < 0\}$

oss. $x^2+1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

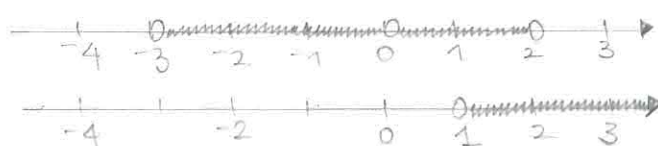
$A =]-3, 2[\setminus \{0\}$



$B = \{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{x-1} + x \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : \frac{x^2-x+1}{x-1} \geq 0\}$

Poiché $x^2-x+1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, si ha facilmente che

$B =]1, +\infty[$



wavy = A

wavy = B

A è limitato; B non è limitato (non essendo limitato superiormente)



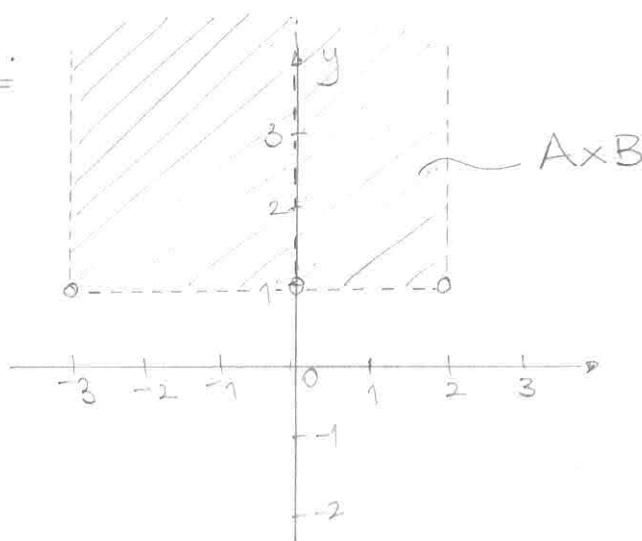
ii) $A \cap B =]1, 2[$

\Rightarrow A e B non sono disgiunti.

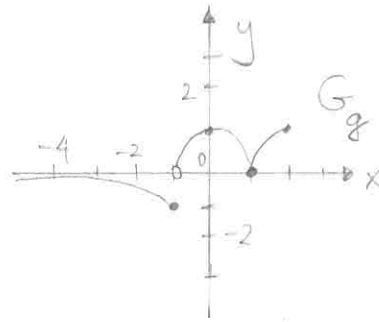
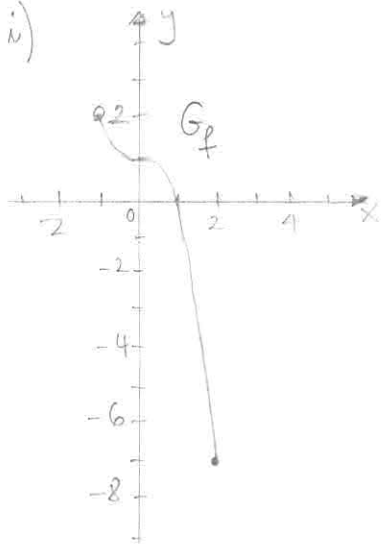
$\mathbb{R} \setminus B =]-\infty, 1]$



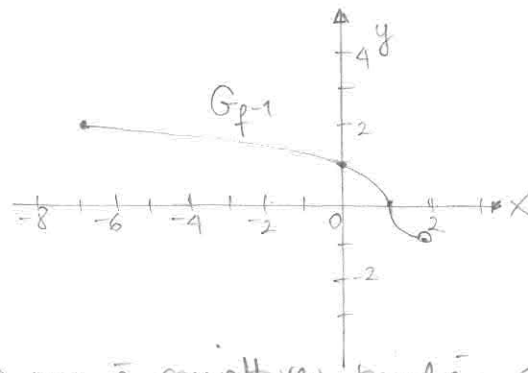
iii)




b5) i)



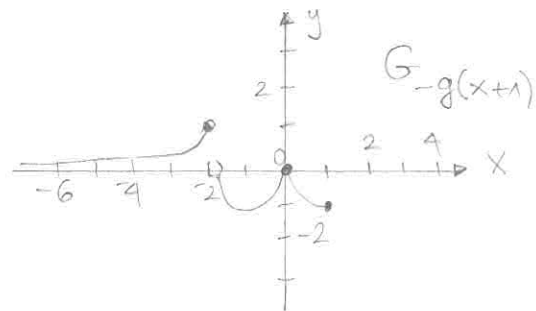
ii)




iii) $g(\mathbb{R}) = [-1, 1]$. g non è suriettiva, poiché $g(\mathbb{R}) \subsetneq \mathbb{R}$. 

iv) g non è iniettiva; basta considerare $x_1 = 0 \neq x_2 = 2$ e si ha $g(x_1) = g(x_2)$. 

v) $x \mapsto -g(x+1)$
 \uparrow
 $[-\infty, 1]$



vi) $\min_{[-\infty, 2]} g = \underline{\underline{-1}}$ $x = -1$ pr. di minimo.

$\max_{[-\infty, 2]} g = \underline{\underline{1}}$ $x_1 = 0, x_2 = 2$ sono pr. di massimo. 

vii) $(f \circ g)(-1) = f(g(-1)) = f(-1) = \cancel{7}$. 