

Università degli Studi di Trento - Facoltà di Scienze Cognitive
 CdL in Scienze e Tecniche di Psicologia Cognitiva
 CdL in Interfacce e Tecnologie della Comunicazione - CdL in Filosofia
 SECONDA PROVA INTERMEDIA DI ANALISI MATEMATICA (LOW)
 a.a. 2012/2013 - Rovereto, 7 gennaio 2013 ELENCO DI ALGEBRA

FILA (A)

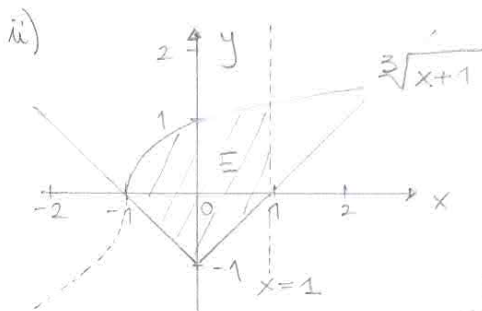
$$1) i) \int_{-1}^0 (4x+3)^5 dx = \frac{1}{4} \int_{-1}^0 4(4x+3)^5 dx = \frac{1}{4} \left[\frac{(4x+3)^6}{6} \right]_{-1}^0 =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \left[\frac{3^6}{6} - \frac{(-1)^6}{6} \right] = \frac{1}{24} \cdot 728 = \underline{\underline{\frac{91}{3}}}$$

$$\int_{-3}^2 \left(\frac{4x}{x^2+1} + x^2 \right) dx = \left[2 \log(x^2+1) + \frac{x^3}{3} \right]_{-3}^2 = \left(2 \log 5 + \frac{8}{3} \right) - \left(2 \log 10 - 9 \right)$$

$$= 2 \log \frac{5}{10} + \frac{35}{3} = -2 \log 2 + \frac{35}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x^2-4} \right) \stackrel{\substack{\text{infinitesimo} \\ \text{negativo}}}{\text{infinitesimo} \\ \text{negativo}}} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left[\frac{x+2-1}{x^2-4} \right] = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left[\frac{x+1}{x^2-4} \right] = -\infty$$



$$\text{area } E = \int_{-1}^1 f(x) dx + \frac{1}{2} \cdot 1 =$$

$$= \int_{-1}^1 (x+1)^{1/2} dx + 1 =$$

$$= \left[\frac{(x+1)^{3/2}}{3/2} \right]_{-1}^1 + 1 = \frac{2}{3} \cdot 2^{3/2} + 1 = \underline{\underline{\frac{3\sqrt{2}}{2} + 1}}$$

$$iii) \sum_{n=0}^4 \frac{f(-n)}{n!} \quad \text{con } f(x) = \begin{cases} 3 & \text{se } x < -2 \\ 2 & \text{se } -2 \leq x < 0 \\ 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

$$= \frac{f(0)}{0!} + \frac{f(-1)}{1!} + \frac{f(-2)}{2!} + \frac{f(-3)}{3!} + \frac{f(-4)}{4!} =$$

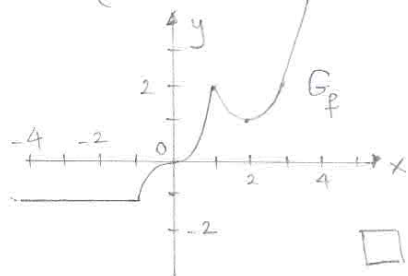
$$= \frac{1}{1} + \frac{2}{1} + \frac{2}{2!} + \frac{3}{3!} + \frac{3}{4!} = 1 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \underline{\underline{\frac{37}{8}}}$$

$$iv) \frac{a_1}{2} - \frac{a_2}{4} + \frac{a_3}{6} - \dots + \frac{a_{15}}{30} = \sum_{n=1}^{15} (-1)^{n+1} \frac{a_n}{2n}$$

2) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \leq -1 \\ x^3 & \text{se } -1 < x \leq 0 \\ 2x^2 & \text{se } 0 < x < 1 \\ (x-2)^2 + 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

i)



ii) $x_0 = -1$: $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (-1) = -1 = f(-1)$
 $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} x^3 = -1$ //

$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} x^3 = -1$ //

$x_0 = 0$: $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^3 = 0 = f(0)$
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2x^2 = 0$ //

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2x^2 = 0$ //

$x_0 = 1$: $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2x^2 = 2$
 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} [(x-2)^2 + 1] = 2 = f(1)$.

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} [(x-2)^2 + 1] = 2 = f(1)$.

Quindi, $\forall x_0 \in [-1, 0, 1]$ si ha $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$ e

quindi la continuità di f nei pt. x_0 . □

iii) $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h^3 - 0}{h} = 0$

$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h^2 - 0}{h} = 0$;

quindi $\exists$ finito $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = f'(0)$ e vale 0. Quindi

f è derivabile in $x_0 = 0$. □

iv) $\max_{[-2, 3]} f = 2$

pt. di massimo $x \in \{1, 3\}$

$\min_{[-2, 3]} f = -1$

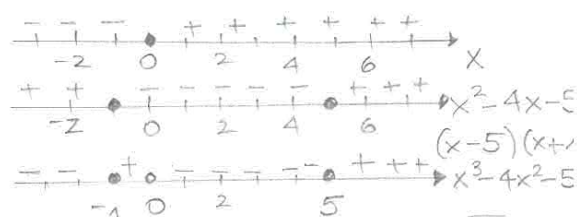
pt. di minimo $x \in [-2, -1]$ ▨

3) $x^3 \log_{1/2} \frac{1}{2} - x^2 \log_2 16 \leq -x \log_{1/3} 243$

$\Leftrightarrow x^3 - x^2 \cdot 4 \leq -x(-5)$

$\Leftrightarrow x(x^2 - 4x - 5) \leq 0$

$S =]-\infty, -1] \cup [0, 5]$



- 3 -

$$\bullet \frac{3^{|x-1|} \cdot 3^{x^2}}{9} = 27^x \Leftrightarrow 3^{|x-1|+x^2-2} = 3^{3x}$$

$$\Leftrightarrow |x-1|+x^2-2 = 3x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2+x-1-3x-2=0 \end{cases} \quad \circ \quad \begin{cases} x < 1 \\ x^2-x+1-2-3x=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2-2x-3=0 \end{cases} \quad \circ \quad \begin{cases} x < 1 \\ x^2-4x-1=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \in \{-1, 3\} \end{cases} \quad \circ \quad \begin{cases} x < 1 \\ x_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{16+4}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{5}}{2} = 2 \pm \sqrt{5} \end{cases}$$

$$\underline{\underline{S = \{2-\sqrt{5}, 3\}}}$$

□

$$\bullet \log_{1/3}(|x|-1) \geq 0 \Leftrightarrow \log_{1/3}(|x|-1) \geq \log_{1/3} 1 \Leftrightarrow \log_{1/3} x \downarrow \begin{cases} |x|-1 > 0 \\ |x|-1 \leq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |x| > 1 \\ |x| \leq 2 \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{S = [-2, -1[\cup]1, 2]}}$$

■

4) Dal teorema fondamentale del calcolo integrale si ha

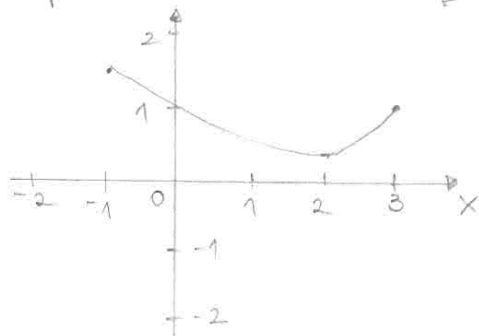
$F'(x) = f(x) \forall x \in [-1, 3]$; quindi $f(x) > 0$ su $[-1, 3]$ implica $F'(x) > 0$ su $[-1, 3]$ e quindi F crescente su $[-1, 3]$.

Se f è derivabile su $[-1, 3]$, si ha poi $F''(x) = f'(x) \forall x \in [-1, 3]$

quindi $f'(x) < 0$ su $[-1, 2]$ implica $F''(x) < 0$ su $[-1, 2]$

e quindi F concava su $[-1, 2]$, mentre $f'(x) > 0$ su $[2, 3]$

implica $F''(x) > 0$ su $[2, 3]$ e quindi F convessa su $[2, 3]$

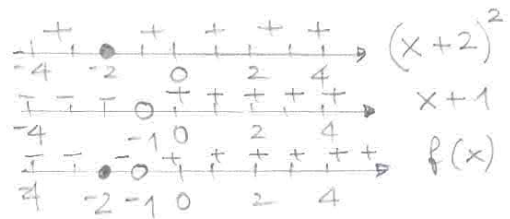


Esempio di funzione f

■

5) $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 4}{x + 1}$ • dom $f = \mathbb{R} \setminus \{-1\} =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$

• segue di f



• comportamento agli estremi del dominio

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$

Asintoto obliquo: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$

$y = x + 3$

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - x] = 3$

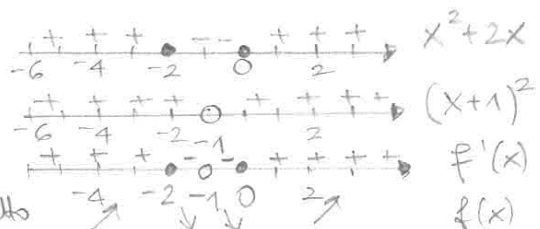
$x = -1$ asintoto verticale per f .

• f è continua in $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

• dom $f' = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ $f'(x) = \frac{(2x+4)(x+1) - (x^2+4x+4)}{(x+1)^2} =$
 $= \frac{2x^2 + 6x + 4 - x^2 - 4x - 4}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$

$x = -2, x = 0$ pt. critici

per f



$x = -2$ pt. di max. loc. stretto per f

$f(-2) = 0$

$x = 0$ pt. di min. loc. stretto per f ; $f(0) = 4$

dom $f'' = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ $f''(x) = \frac{(2x+2)(x+1)^2 - (x^2+2x)2(x+1)}{(x+1)^4} =$

$= \frac{2x^2 + 4x + 2 - 2x^2 - 4x}{(x+1)^3} = \frac{2}{(x+1)^3}$

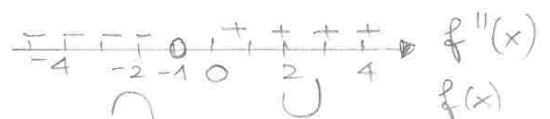
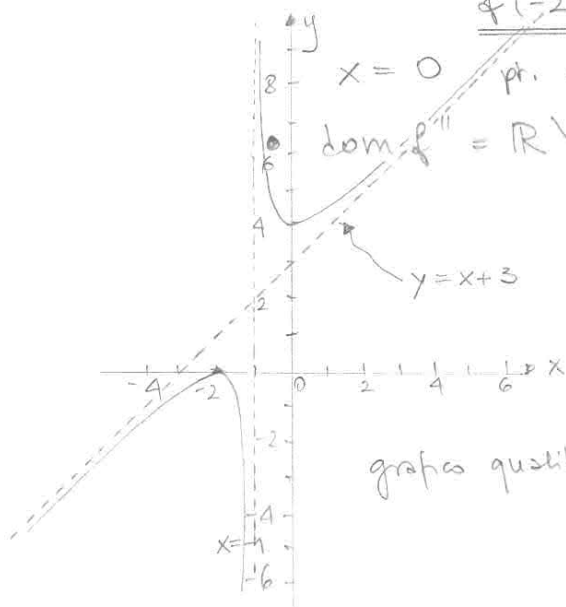
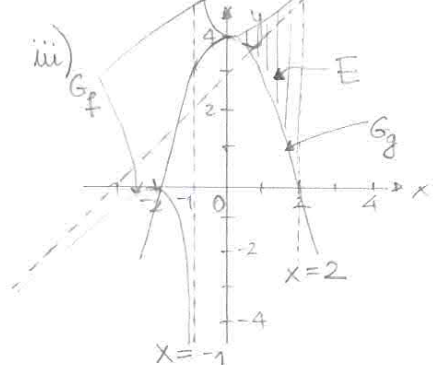


grafico qualitativo di f .



□

$$ii) \quad x+3 + \frac{1}{x+1} = \frac{(x+3)(x+1) + 1}{x+1} = \frac{x^2+4x+3+1}{x+1} = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$



$$area(E) = \int_0^2 [f(x) - g(x)] dx$$

$$= \int_0^2 \left[x+3 + \frac{1}{x+1} + x^2 - 4 \right] dx =$$

$$ii) = \left[\frac{x^2}{2} - x + \frac{x^3}{3} + \log|x+1| \right]_0^2 =$$

$$= \left[\cancel{2} - \cancel{2} + \frac{8}{3} + \log 3 \right] = \frac{8}{3} + \log 3. \quad \blacksquare$$

6) • $f(x) = 2x^5 + 3x - 2$

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. f è continua e derivabile

in $\mathbb{R}$ e $f'(x) = 10x^4 + 3 > 0$, quindi f è crescente su $\mathbb{R}$ e quindi interseca una ed una sola volta l'asse x .

• Oss. che $f(0) = -2$, $f(1) = \cancel{2} + 3 - \cancel{2} > 0$; quindi lo zero di f cade nell'intervallo $[0, 1]$.

Calcoliamo f nel pt. medio di $[0, 1]$, ossia in $x = \frac{1}{2}$; in

ha $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{16} + \frac{3}{2} - 2 < 0$. Possiamo allora afferire

che lo zero ritrova nell'intervallo $[\frac{1}{2}, 1]$. Consideriamo

il pt. medio di quest'intervallo che è $x = \frac{3}{4}$. Si

ha $f(\frac{3}{4}) = 2 \cdot \frac{3^5}{4^5} + \frac{9}{4} - 2 > 0$; possiamo allora

dire che nell'intervallo $[a, b] \doteq [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ cade lo zero di f . ▀