| | |
|---|---|
| COGNOME ____________ | NON SCRIVERE QUI |
| NOME ____________ | 1 2 3 4 5 6 |
| MATRICOLA ⌊⌊⌊⌊⌊⌊⌊ | A |

# UNIVERSITÀ DI TRENTO — FACOLTÀ DI SCIENZE COGNITIVE

CDL IN SCIENZE E TECNICHE DI PSICOLOGIA COGNITIVA
CDL IN INTERFACCE E TECNOLOGIE DELLA COMUNICAZIONE
CDL IN FILOSOFIA

## ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA (CON ELEMENTI DI ALGEBRA)

A.A. 2012-2013 — ROVERETO, 14 FEBBRAIO 2013

---

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **TRE ORE**.
**Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.**
**È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti;** al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.
**Potete usare solo il vostro materiale di scrittura e il vostro materiale di studio.** Non usate il colore rosso.

---

1) Sia $C$ il centro dell'ellisse $\mathcal{E}$ di equazione $x^2+4y^2-4x-8y+4=0$ e $V$ il vertice della parabola $\mathcal{P}$ di equazione $y+2x^2+8x+9=0$.
i) Determinate l'equazione della retta $r$ passante per $C$ e $V$.
ii) Determinate l'equazione della retta $r'$ perpendicolare alla retta $r$ e passante per il punto di intersezione $S$ della parabola con l'asse $y$.
iii) Rappresentate graficamente $\mathcal{E}$ e $\mathcal{P}$ e le due rette $r$ e $r'$.
iv) Determinate l'area della regione piana $F$ delimitata dalla parabola $\mathcal{P}$ e dalla retta $r'$.

---

2) i) Siano $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ le funzioni definite da $f(x)=e^{2x^2-3x}$ e $g(x)=\log(3x^2+2x+1)$.
a) Determinate gli insiemi

$$A=\{x\in\mathbb{R}: f'(x)>0\} \qquad B=\{x\in\mathbb{R}: g(x)\le 0\}$$

e rappresentateli sulla retta reale. Dite se sono intervalli.
b) Determinate gli insiemi $A\cap B$, $A\cup B$ e $A\setminus B$.
ii) Calcolate $\displaystyle\sum_{n=1}^{4}\int_1^2 x^{-n}\,dx$.

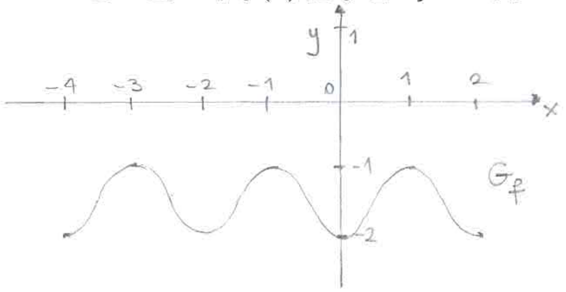
3) Siano $f : [-3,4] \to \mathbb{R}$ e $g : [-4,4] \to \mathbb{R}$ le funzioni definite da

$$f(x) = \begin{cases} (\frac{1}{2})^x & \text{se } -3 \le x < 0 \\ -2x+1 & \text{se } 0 \le x < 2 \\ 3\log_{\frac{1}{2}} x & \text{se } 2 \le x \le 4\,; \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} -x^2 - 4x & \text{se } -4 \le x \le 0 \\ -x^2 & \text{se } 0 < x < 1 \\ |x-2| - 2 & \text{se } 1 \le x \le 4\,. \end{cases}$$

i) Rappresentate nel piano cartesiano il grafico di $f$ e il grafico di $g$.
ii) Determinate l'immagine di $f$. Determinate $f^{-1}(1)$ e $f^{-1}(-6)$, dove $f^{-1}$ è la funzione inversa di $f$ definita su $f([-3,4])$.
iii) Calcolate $\lim_{h\to 0^-} \frac{g(1+h)-g(1)}{h}$ e $\lim_{h\to 0^+} \frac{g(1+h)-g(1)}{h}$. Dite se $g$ è derivabile in $x_0 = 1$.
iv) Dite se $g$ soddisfa le ipotesi del teorema di Weierstrass sul suo dominio.
v) Determinate il massimo e il minimo (risp. i punti di massimo e i punti di minimo) della funzione $|g(x)|$ definita su $[-4,4]$.

---

4) Sia $f : [-4,2] \to \mathbb{R}$ la funzione rappresentata in figura. Sia $F : [-4,2] \to \mathbb{R}$ la funzione integrale di $f$ definita da $F(x) = \int_{-4}^{x} f(t)\,dt$.
i) Tracciate un grafico qualitativo di $F$ dopo aver individuato gli intervalli di monotonia e gli intervalli di convessità/concavità di $F$.
ii) Sia $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -4 \le x \le -3,\ f(x) \le y \le 0\}$. Supposto che area$(E) = \frac{3}{2}$, calcolate $F(2)$.




---

5) i) Studiate (insieme di definizione, segno, comportamento agli estremi dell'insieme di definizione, asintoti, continuità, derivabilità, punti critici e monotonia) la funzione definita da

$$f(x) = \frac{x^4 - 4x^3}{e^x}$$

e rappresentatela graficamente nel piano cartesiano.
ii) Determinate l'equazione della retta tangente $r$ al grafico di $f$ nell'origine degli assi cartesiani.
iii) Provate che la funzione $F(x) = -x^4 e^{-x}$ è una primitiva di $f$ nel suo insieme di definizione.
iv) Calcolate l'area della regione piana $E$ delimitata dal grafico di $f$ e dalla retta $r$ determinata in ii).

---

6) Sia $\mathcal{A}$ una proposizione. Provate che la seguente proposizione, nota come legge del terzo escluso, è una tautologia: "$\mathcal{A}$**o**(**non**$\mathcal{A}$)".

---

| | | |
|---|---|---|
| COGNOME ____________________<br>NOME ____________________<br>MATRICOLA _______ | NON SCRIVERE QUI<br>1 2 3 4 5 6 | B |

# UNIVERSITÀ DI TRENTO — FACOLTÀ DI SCIENZE COGNITIVE

## CDL IN SCIENZE E TECNICHE DI PSICOLOGIA COGNITIVA
## CDL IN INTERFACCE E TECNOLOGIE DELLA COMUNICAZIONE
## CDL IN FILOSOFIA

## ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA (CON ELEMENTI DI ALGEBRA)

A.A. 2012-2013 — ROVERETO, 14 FEBBRAIO 2013

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **TRE ORE**.
**Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.**
**È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti;** al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.
**Potete usare solo il vostro materiale di scrittura e il vostro materiale di studio.** Non usate il colore rosso.

1) Sia $C$ il centro dell'ellisse $\mathcal{E}$ di equazione $4x^2+y^2+8x-4y+4=0$ e $V$ il vertice della parabola $\mathcal{P}$ di equazione $y+2x^2-8x+9=0$.
i) Determinate l'equazione della retta $r$ passante per $C$ e $V$.
ii) Determinate l'equazione della retta $r'$ perpendicolare alla retta $r$ e passante per il punto di intersezione $S$ della parabola con l'asse $y$.
iii) Rappresentate graficamente $\mathcal{E}$ e $\mathcal{P}$ e le due rette $r$ e $r'$.
iv) Determinate l'area della regione piana $F$ delimitata dalla parabola $\mathcal{P}$ e dalla retta $r'$.

2) i) Siano $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ le funzioni definite da $f(x)=e^{-2x^2+3x}$ e $g(x)=\log(4x^2+3x+1)$.
a) Determinate gli insiemi

$$A=\{x\in\mathbb{R}: f'(x)>0\} \qquad B=\{x\in\mathbb{R}: g(x)\leq 0\}$$

e rappresentateli sulla retta reale. Dite se sono intervalli.
b) Determinate gli insiemi $A\cap B$, $A\cup B$ e $A\setminus B$.
ii) Calcolate $\displaystyle\sum_{n=1}^{4}\int_1^3 x^{-n}\,dx$.

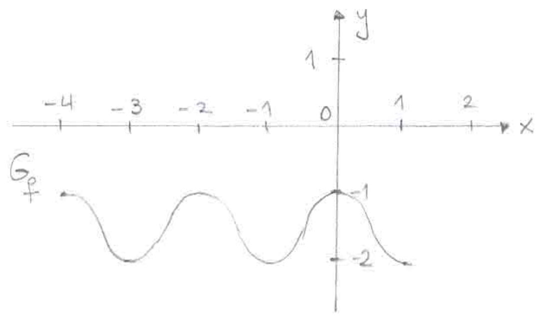
3) Siano $f : [-3,4] \to \mathbb{R}$ e $g : [-4,4] \to \mathbb{R}$ le funzioni definite da

$$f(x) = \begin{cases} -(\frac{1}{2})^x & \text{se } -3 \le x < 0 \\ 2x-1 & \text{se } 0 \le x < 2 \\ 3\log_2 x & \text{se } 2 \le x \le 4; \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} -|x+2|+2 & \text{se } -4 \le x \le -1 \\ x^2 & \text{se } -1 < x \le 0 \\ x^2 - 4x & \text{se } 0 < x \le 4. \end{cases}$$

i) Rappresentate nel piano cartesiano il grafico di $f$ e il grafico di $g$.
ii) Determinate l'immagine di $f$. Determinate $f^{-1}(-8)$ e $f^{-1}(3)$, dove $f^{-1}$ è la funzione inversa di $f$ definita su $f([-3,4])$.
iii) Calcolate $\lim_{h\to 0^-} \frac{g(-1+h)-g(-1)}{h}$ e $\lim_{h\to 0^+} \frac{g(-1+h)-g(-1)}{h}$. Dite se $g$ è derivabile in $x_0 = -1$.
iv) Dite se $g$ soddisfa le ipotesi del teorema di Weierstrass sul suo dominio.
v) Determinate il massimo e il minimo (risp. i punti di massimo e i punti di minimo) della funzione $|g(x)|$ definita su $[-4,4]$.

---

4) Sia $f : [-4,1] \to \mathbb{R}$ la funzione rappresentata in figura. Sia $F : [-4,1] \to \mathbb{R}$ la funzione integrale di $f$ definita da $F(x) = \int_{-4}^{x} f(t)\,dt$.
i) Tracciate un grafico qualitativo di $F$ dopo aver individuato gli intervalli di monotonia e gli intervalli di convessità/concavità di $F$.
ii) Sia $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -4 \le x \le -3,\ f(x) \le y \le 0\}$. Supposto che $\text{area}(E) = \frac{3}{2}$, calcolate $F(1)$.




---

5) i) Studiate (insieme di definizione, segno, comportamento agli estremi dell'insieme di definizione, asintoti, continuità, derivabilità, punti critici e monotonia) la funzione definita da

$$f(x) = \frac{4x^3 - x^4}{e^x}$$

e rappresentatela graficamente nel piano cartesiano.
ii) Determinate l'equazione della retta tangente $r$ al grafico di $f$ nell'origine degli assi cartesiani.
iii) Provate che la funzione $F(x) = x^4 e^{-x}$ è una primitiva di $f$ nel suo insieme di definizione.
iv) Calcolate l'area della regione piana $E$ delimitata dal grafico di $f$ e dalla retta $r$ determinata in ii).

---

6) Sia $\mathcal{A}$ una proposizione. Provate che la seguente proposizione, nota come legge di non contraddizione, è una tautologia: "**non**[$\mathcal{A}$**e**(**non**$\mathcal{A}$)]".

---