

Università degli Studi di Trento - Facoltà di Scienze Cognitive
 CdL in Scienze e Tecniche di Psicologia Cognitiva
 CdL in Interfacce e Tecnologie della Comunicazione - CdL in Filosofia
 VERIFICA SETTIMANALE DI ANALISI MATEMATICA (CON ELEMENTI DI ALGEBRA)
 a.a. 2012/2013 - Roberto, 26 - 30 novembre 2012

1) i) $f(x) = \frac{1}{(x-1)^3}$ $(x_0, f(x_0)) = (2, 1)$

L'eq. della retta tg al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$ è data da $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

Ora, $f(x) = (x-1)^{-3}$ e $f'(x) = -3(x-1)^{-4} = \frac{-3}{(x-1)^4}$ e quindi:

$f'(2) = -3$. Ne segue che $y = 1 - 3(x-2)$, ossia $y = -3x + 7$

è l'eq. della retta tg al grafico di f in $(2, 1)$. □

ii) $g(x) = \sqrt{x+1}$ $(x_0, g(x_0)) = (3, 2)$

Ora, $g(x) = (x+1)^{\frac{1}{2}}$ e $g'(x) = \frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$ e quindi:

$g'(3) = \frac{1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4}$. Ne segue che $y = 2 + \frac{1}{4}(x-3)$, ossia

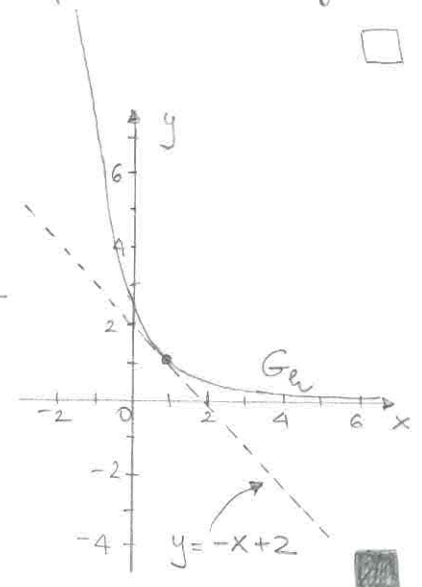
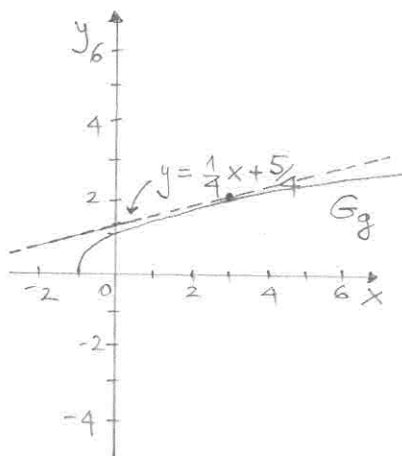
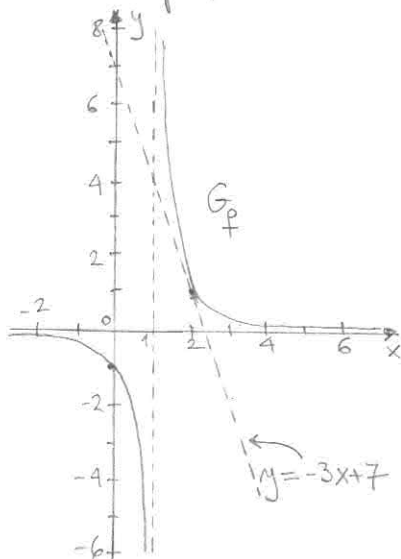
$y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$ è l'eq. della retta tg al grafico di g in $(3, 2)$. □

iii) $h(x) = e^{-x+1}$ $(x_0, h(x_0)) = (1, 1)$

Si ha $h'(x) = -e^{-x+1}$ e quindi $h'(1) = -1$. Ne segue che

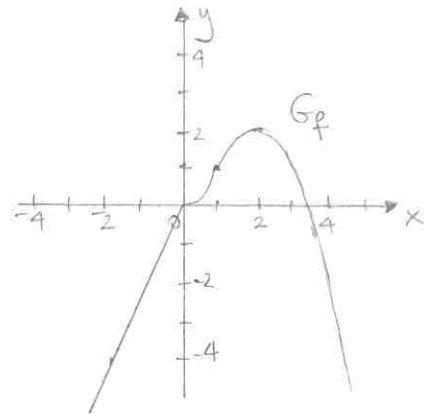
$y = 1 - 1(x-1)$, ossia $y = -x + 2$ è l'eq. della retta tg

al grafico di h in $(1, 1)$. □



2) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x \leq 0 \\ x^2 & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ -(x-2)^2 + 2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$



i) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 2x = 0 = f(0)$
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0$

$\Rightarrow f$ è continua in $x=0$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1 = f(1)$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (-x^2 + 4x - 2) = 1 \Rightarrow f$ è continua in $x=1$. $\square$

ii) $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{2h - 0}{h} = \underline{2} = f'_-(0)$
 $\Rightarrow f$ non è derivabile in $x=0$. $\square$

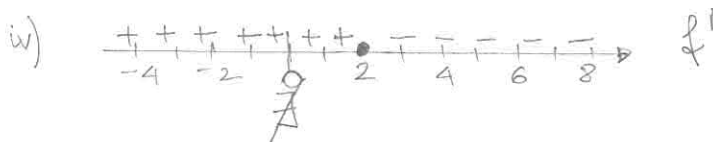
$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h^2 - 0}{h} = \underline{0} = f'_+(0)$

iii) $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{(1+h)^2 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{2h + h^2}{h} = \underline{2} = f'_-(1)$

$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-(1+h-2)^2 + 2 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-(-1+h)^2 + 1}{h}$

$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{2h - h^2}{h} = \underline{2} = f'_+(1)$

$\Rightarrow f$ è derivabile in $x=1$. $\square$



3) i) $\left(\frac{x + \log x}{e^x + x^{-2}} \right)' = \frac{(1 + \frac{1}{x})(e^x + x^{-2}) - (x + \log x)(e^x - 2x^{-3})}{(e^x + x^{-2})^2};$

$\left(\frac{x e^x}{2 + 2^x} \right)' = \frac{(e^x + x e^x)(2 + 2^x) - x e^x (2^x \log 2)}{(2 + 2^x)^2};$

$\left(\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x + \log_2 x}} \right)' = \frac{\frac{1}{4} x^{-3/4} (\sqrt{x + \log_2 x}) - \sqrt[4]{x} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x \log 2} \right)}{(\sqrt{x + \log_2 x})^2}; \quad \square$

ii) $\left((3x+1)^4 \right)' = 4(3x+1)^3 \cdot 3 = 12(3x+1)^3;$

$$\left((3x - e^{2x})^{-2}\right)' = -2(3x - e^{2x})^{-3} (3 - e^{2x} \cdot 2);$$

$$(e^{x^2+2x})' = (2x+2)e^{x^2+2x};$$

$$(\log(5x + e^x + 1)^3)' = \frac{1}{(5x + e^x + 1)^3} \cdot 3(5x + e^x + 1)^2 \cdot (5 + e^x)$$

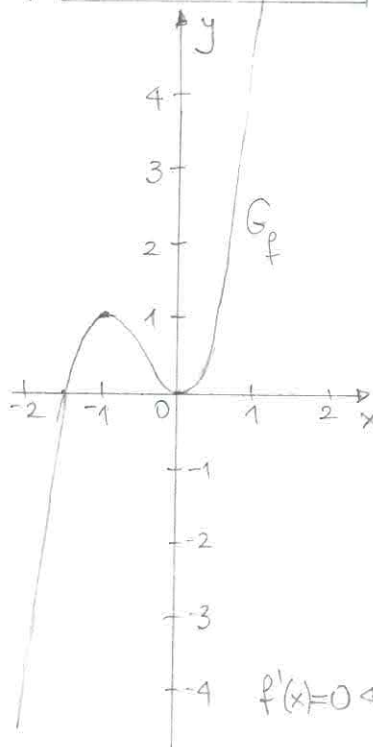
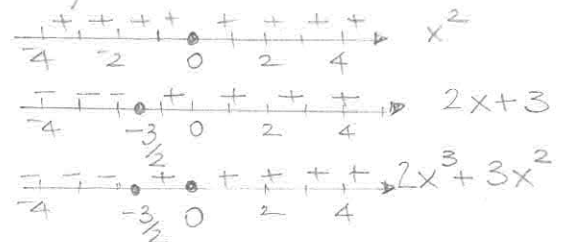
- 4) i) $y = 1$ asintoto orizzontale per f , per $x \rightarrow -\infty$;
 $y = 2$ asintoto orizzontale per f , per $x \rightarrow +\infty$;
 $x = 0$ asintoto verticale per f . □

- ii) $x = -1$, $x = 3$ pt. di massimo locale di f in $\mathbb{R}$ (sono anche globali)
 $x = 0$ pt. di max. loc. di f .
 $x = 1$, $x = 5$ pt. di minimo locale di f in $\mathbb{R}$. □

- iii) $(-1, 2)$, $(1, -1)$, $(3, 2)$, $(5, -1)$ sono i punti del grafico di f in cui la retta tangente al grafico risulta essere orizzontale. ■

5) $f(x) = 2x^3 + 3x^2$ i) $\text{dom } f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$;

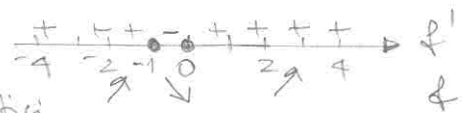
ii) $f(x) = x^2(2x+3)$



iii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$;

iv) f è continua in $\mathbb{R}$ (prodotto e somma di funzioni continue)

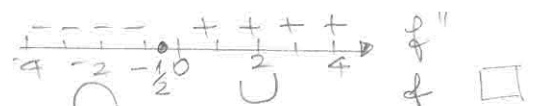
v) $\text{dom } f' = \mathbb{R}$ $f'(x) = 6x^2 + 6x = 6x(x+1)$



$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \end{cases}$ pt. critici

$x = -1$ pt. di max. loc. stretto per f ; $\underline{\underline{f(-1) = 1}}$
 $x = 0$ pt. di min. loc. stretto per f ; $\underline{\underline{f(0) = 0}}$;

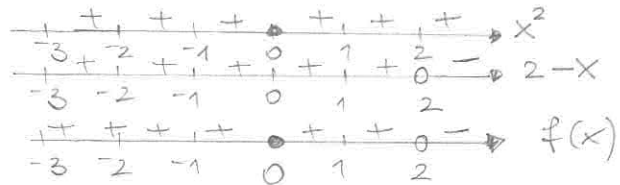
vi) $\text{dom } f'' = \mathbb{R}$ $f''(x) = 12x + 6 = 6(2x+1)$.



$$f(x) = \frac{x^2}{2-x}$$

i) $\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{2\} =]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[;$

ii)



iii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$ $x=2$ asintoto verticale per f

$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$ $x=2$ asintoto verticale per f

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Osserviamo che $f(x)$, per $x \rightarrow -\infty$ si comporta come $\frac{x^2}{-x}$, o sia come $-x$ (a meno di una eventuale traslazione);

questo ci fa pensare che f abbia un asintoto obliquo per $x \rightarrow -\infty$ ($+\infty$).

Calcoliamo allora

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{2x - x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x}(\frac{2}{x} - 1)} = -1 = a$$

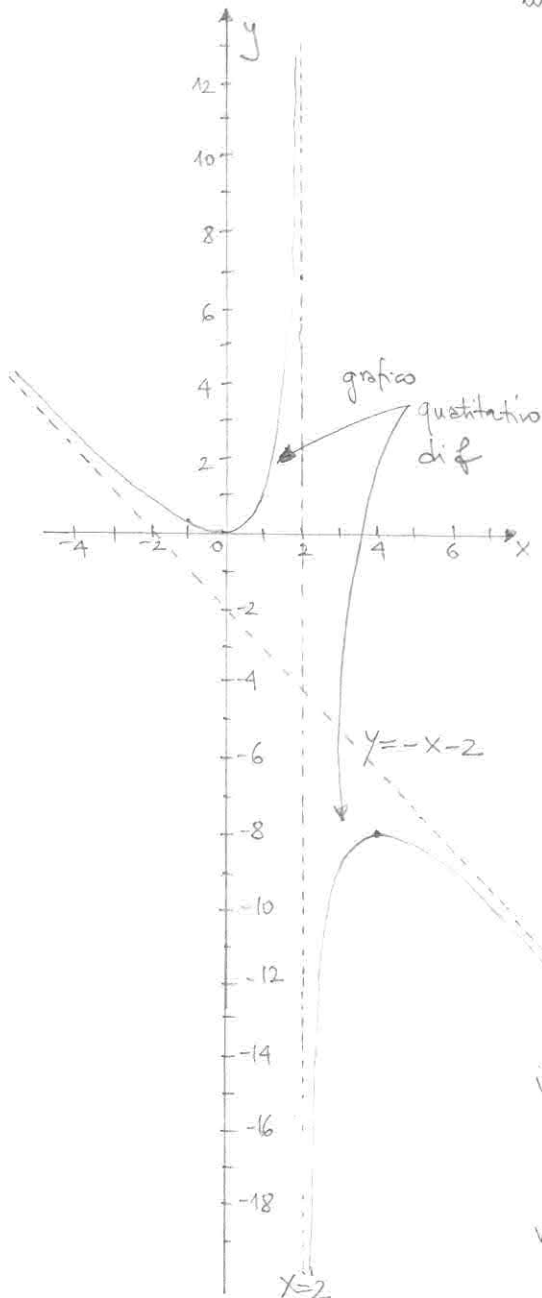
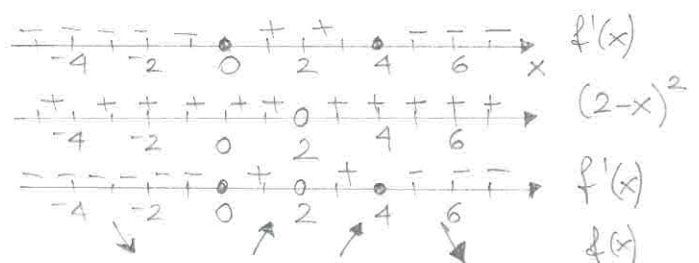
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x^2}{2-x} + x \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{\cancel{x^2} + 2x - \cancel{x^2}}{2-x} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{\cancel{x}(\frac{2}{x} - 1)} = -2 = b$$

Allora la retta di eq. $y = -x - 2$ è asintoto obliquo per f , per $x \rightarrow -\infty$ ($+\infty$).

iv) f è continua su $\text{dom } f$, essendo somma e rapporto di funzioni continue.

v) $\text{dom } f' = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ $f'(x) = \frac{2x(2-x) - x^2(-1)}{(2-x)^2} = \frac{4x - x^2}{(2-x)^2}$

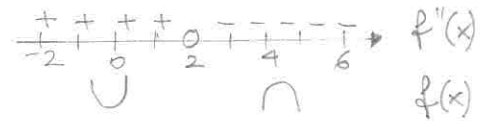
$f'(x) = \frac{x(4-x)}{(2-x)^2}$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x=0, x=4$
pt. critici



$x=0$ pt. di minimo loc. stretto per f ; $f(0)=0$

$x=4$ pt. di massimo loc. stretto per f ; $f(4)=\frac{16}{2-4}=-8$;

$$vi) \text{ dom } f'' = \frac{(4-2x)(2-x)^2 + (4x-x^2) \cdot 2(2-x)}{(2-x)^3} = \frac{8}{(2-x)^3}$$



$$f(x) = \frac{4x^2}{1+x^2}$$

i) $\text{dom } f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$;

ii)

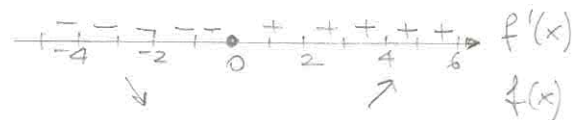
f è pari !!

(osserviamo che $x^2 \geq 0$ e $=0 \Leftrightarrow x=0$;
inoltre $1+x^2 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$)

iii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 4$ $y=4$ è asintoto orizz. per f per $x \rightarrow -\infty$ (per $x \rightarrow +\infty$)

iv) f è continua su $\mathbb{R}$, essendo rapporto di funzioni continue.

v) $\text{dom } f' = \mathbb{R}$ $f'(x) = \frac{8x(1+x^2) - 4x^2 \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{8x}{(1+x^2)^2}$



$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ pt. critico

Risulta che $x=0$ è pt. di minimo loc. stretto per f ;

$f(0)=0$

vi) $\text{dom } f'' = \mathbb{R}$ $f''(x) = \frac{8(1+x^2)^2 - 8x \cdot 2(1+x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)^3}$

$$= \frac{8 + 8x^2 - 32x^2}{(1+x^2)^3} = \frac{8 - 24x^2}{(1+x^2)^3}$$

$$= \frac{8(1-3x^2)}{(1+x^2)^3}$$

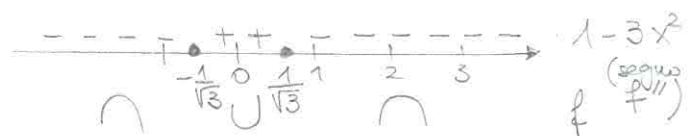
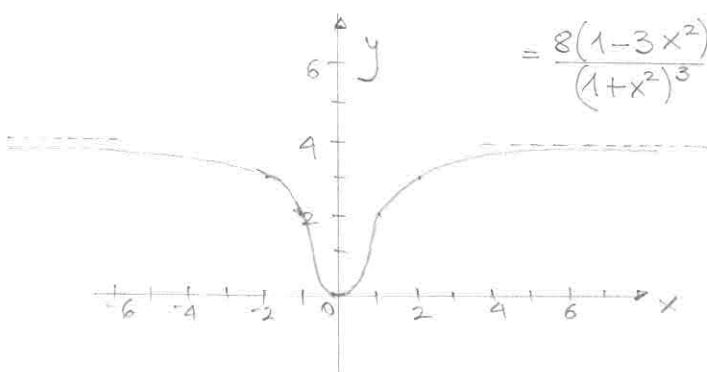


grafico qualitativo di f



□

$$f(x) = x^2 e^{-x+1}$$

i) $\text{dom } f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

ii) $\begin{array}{ccccccc} + & + & + & + & + & + & + \\ -1 & -2 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \rightarrow f(x)$

iii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^{x-1}} = 0$$

$\Rightarrow y=0$ è asintoto orizzontale per f , per $x \rightarrow +\infty$.

iv) f è continua essendo composizione e prodotto di funzioni in $\mathbb{R}$.

v) $\text{dom } f' = \mathbb{R}$ $f'(x) = 2x e^{-x+1} - x^2 e^{-x+1} = (2x - x^2) e^{-x+1} = x(2-x) e^{-x+1}$

$$\begin{array}{ccccccc} + & - & - & - & + & + & - \\ -4 & -2 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} f'(x) \\ \downarrow \quad \uparrow \quad \downarrow \\ f(x) \end{array}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x=0, x=2$$

donopr. critici.

$x=0$ è pr. di min. loc. stretto per f ; $\underline{\underline{f(0)=0}}$

$x=2$ è pr. di max. loc. stretto per f ; $\underline{\underline{f(2)=4e^{-2+1}}}$
 $\underline{\underline{= \frac{4}{e}}}$;

vi) $\text{dom } f'' = \mathbb{R}$

$$f''(x) = (2-2x) e^{-x+1} - (2x-x^2) e^{-x+1} = (x^2 - 4x + 2) e^{-x+1}$$

$$x^2 - 4x + 2 = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-8}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 2 \pm \sqrt{2}$$

$$\begin{array}{ccccccc} + & + & + & + & - & - & + \\ -4 & -2 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \rightarrow f''(x)$$

$\downarrow \quad \uparrow$
 $2-\sqrt{2} \quad 2+\sqrt{2}$

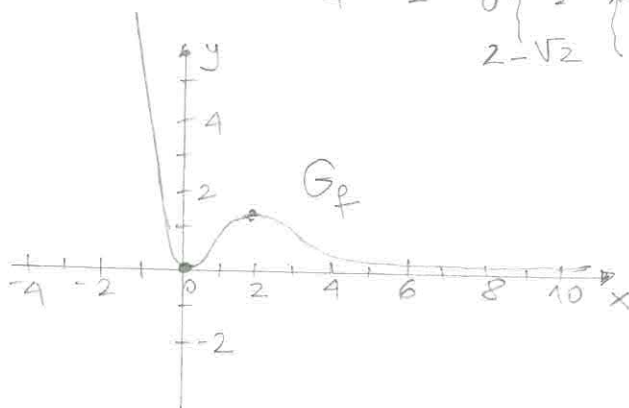


grafico qualitativo
di f



- 7 -

$$f(x) = \log(2+x^4)$$

f è pari !!

i) $\text{dom } f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$ poiché $2+x^4 > 0$
 $\forall x \in \mathbb{R}$

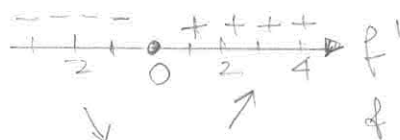
ii) poiché $2+x^4 > 1$ segue

$$\log(2+x^4) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R};$$

$$\text{iii) } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

iv) f è continua su $\mathbb{R}$ essendo composizione di funzioni continue.

$$\text{v) } \text{dom } f' = \frac{4x^3}{2+x^4} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

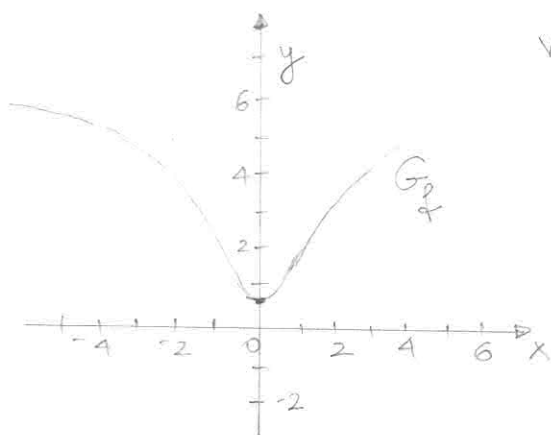


$f'(x)=0$ se e solo se $x=0$, unico pt. critico.

Dal segno di f' risulta subito che

$x=0$ è pr. di min. loc. stretto per f .

Inoltre $f(0) = \log 2$



$$\text{vi) } \text{dom } f'' = \frac{12x^2(2+x^4) - 4x^3 \cdot 4x^3}{(2+x^4)^2} =$$

$$= \frac{24x^2 - 4x^6}{(2+x^4)^2} = \frac{4x^2(6-x^4)}{(2+x^4)^2}$$

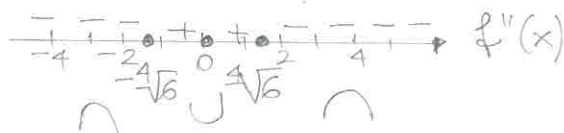


grafico qualitativo di f .

