

COGNOME _____ NOME _____ MATRICOLA <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center; width: 100px;"> <tr> <td style="width: 15px; height: 15px;"></td> <td style="width: 15px; height: 15px;"></td> <td style="width: 15px; height: 15px;"></td> <td style="width: 15px; height: 15px;"></td> <td style="width: 15px; height: 15px;"></td> <td style="width: 15px; height: 15px;"></td> </tr> </table>							<div style="text-align: center; margin-bottom: 10px;">NON SCRIVERE QUI</div> <div style="display: flex; align-items: center;"> <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center; width: 150px;"> <tr> <td style="width: 20px; height: 20px;"></td> <td style="width: 20px; height: 20px;"></td> <td style="width: 20px; height: 20px;"></td> <td style="width: 20px; height: 20px;"></td> <td style="width: 20px; height: 20px;"></td> <td style="width: 20px; height: 20px;"></td> </tr> <tr> <td style="font-size: 8px;">1</td> <td style="font-size: 8px;">2</td> <td style="font-size: 8px;">3</td> <td style="font-size: 8px;">4</td> <td style="font-size: 8px;">5</td> <td style="font-size: 8px;">6</td> </tr> </table> <div style="margin-left: 20px; text-align: center;"> <div style="border: 1px solid black; width: 80px; height: 60px; display: flex; align-items: center; justify-content: center; margin: 0 auto;">A</div> </div> </div>							1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6														

UNIVERSITÀ DI TRENTO — FACOLTÀ DI SCIENZE COGNITIVE

CdL IN SCIENZE E TECNICHE DI PSICOLOGIA COGNITIVA
 CdL IN INTERFACCE E TECNOLOGIE DELLA COMUNICAZIONE
 CdL IN FILOSOFIA

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA (CON ELEMENTI DI ALGEBRA)

A.A. 2012-2013 — ROVERETO, 24 GIUGNO 2013

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **TRE ORE**.

Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.

È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.

Potete usare solo il vostro materiale di scrittura e il vostro materiale di studio. Non usate il colore rosso.

- 1) i) Scrivete in matematica la seguente proposizione: "Se nelle regioni italiane settentrionali continua a piovere, i danni alle colture agricole e al turismo saranno ingenti". Scrivete poi la sua negazione sia in matematica (portando il 'non' il più internamente possibile) che in italiano corrente.
- ii) Sia \mathcal{A} una proposizione. Provate che la proposizione " $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}$ ", nota come legge dell'identità, è una tautologia.

-
- 2) i) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano l'insieme A determinato dal seguente sistema di disequazioni

$$\begin{cases} y \geq -|x| + 1 \\ 4x^2 + 4y^2 - 8y + 3 > 0 \\ \frac{x^2}{4} + (y - 1)^2 \leq 1. \end{cases}$$

- ii) Determinate l'equazione di tutte le rette verticali che non intersecano mai l'insieme A .
-

3) i) Risolvete in \mathbb{R} le seguenti disequazioni/equazioni:

$$x|x-1| \geq x^2 - 3; \quad \log_2(3^x - 1) \leq 3; \quad \frac{2^{-x}2^{|x|+1}}{2^{x^2}} = 4.$$

ii) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano una funzione $f : [1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, decrescente e convessa tale che la sua funzione integrale definita da $F(x) = \int_1^x f(t) dt$ per $x \in [1, 4]$ risulti crescente sull'intervallo $[1, 2]$ e decrescente sull'intervallo $[2, 4]$.

4) Siano $f : [-2, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ le funzioni definite da

$$f(x) = \begin{cases} 2^{x+2} & \text{se } -2 \leq x < 0 \\ 4 & \text{se } x = 0 \\ 2\sqrt{x+4} & \text{se } 0 < x \leq 5; \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} -x^2 + 1 & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

i) Rappresentatele graficamente nel piano cartesiano.

ii) Provate che f è continua in $x = 0$.

iii) Determinate l'immagine di f .

iv) Rappresentate graficamente la funzione inversa $f^{-1} : f([-2, 5]) \rightarrow [-2, 5]$, dopo aver giustificato l'esistenza di f^{-1} .

v) Calcolate $\int_0^5 f(x) dx$.

vi) Determinate il massimo e il minimo (risp. i punti di massimo e i punti di minimo) di g su \mathbb{R} .

vii) Determinate $(f \circ g)(1)$. Determinate, dove esiste, la funzione $(g \circ f)(x)$.

5) i) Sia $g : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da $g(x) = \sqrt{x}$. Calcolate $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{g(h) - g(0)}{h}$.
Determinate $g'_+(0)$.

ii) Studiate (insieme di definizione, segno, comportamento agli estremi dell'insieme di definizione, continuità, derivabilità, punti critici e monotonia, convessità/concavità) la funzione definita da

$$f(x) = (x-1)\sqrt{x}$$

e rappresentatela graficamente nel piano cartesiano.

iii) Determinate l'area della regione piana delimitata dal grafico di f e dalla retta di equazione $y = 0$.

6) Luisa, Anna, Barbara, Claudia e Giulia fanno una gara di corso tra loro. Quante sono tutte le possibili classifiche finali?

COGNOME _____ NOME _____ MATRICOLA <table style="display: inline-table; border: 1px solid black; text-align: center; width: 100px;"> <tr> <td style="width: 15px; height: 15px;"></td> <td style="width: 15px; height: 15px;"></td> <td style="width: 15px; height: 15px;"></td> <td style="width: 15px; height: 15px;"></td> <td style="width: 15px; height: 15px;"></td> <td style="width: 15px; height: 15px;"></td> </tr> </table>							<div style="text-align: center; margin-bottom: 10px;">NON SCRIVERE QUI</div> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 60%; border: 1px solid black; text-align: center; padding: 5px;"> <table style="margin: auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px;"></td> <td style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px;"></td> <td style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px;"></td> <td style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px;"></td> <td style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px;"></td> <td style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px;"></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center; font-size: 8px;">1</td> <td style="text-align: center; font-size: 8px;">2</td> <td style="text-align: center; font-size: 8px;">3</td> <td style="text-align: center; font-size: 8px;">4</td> <td style="text-align: center; font-size: 8px;">5</td> <td style="text-align: center; font-size: 8px;">6</td> </tr> </table> </td> <td style="width: 40%; border: 1px solid black; text-align: center; vertical-align: middle; padding: 10px;"> <div style="font-size: 2em; margin: 0;">B</div> </td> </tr> </table>	<table style="margin: auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px;"></td> <td style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px;"></td> <td style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px;"></td> <td style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px;"></td> <td style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px;"></td> <td style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px;"></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center; font-size: 8px;">1</td> <td style="text-align: center; font-size: 8px;">2</td> <td style="text-align: center; font-size: 8px;">3</td> <td style="text-align: center; font-size: 8px;">4</td> <td style="text-align: center; font-size: 8px;">5</td> <td style="text-align: center; font-size: 8px;">6</td> </tr> </table>							1	2	3	4	5	6	<div style="font-size: 2em; margin: 0;">B</div>
<table style="margin: auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px;"></td> <td style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px;"></td> <td style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px;"></td> <td style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px;"></td> <td style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px;"></td> <td style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px;"></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center; font-size: 8px;">1</td> <td style="text-align: center; font-size: 8px;">2</td> <td style="text-align: center; font-size: 8px;">3</td> <td style="text-align: center; font-size: 8px;">4</td> <td style="text-align: center; font-size: 8px;">5</td> <td style="text-align: center; font-size: 8px;">6</td> </tr> </table>							1	2	3	4	5	6	<div style="font-size: 2em; margin: 0;">B</div>								
1	2	3	4	5	6																

UNIVERSITÀ DI TRENTO — FACOLTÀ DI SCIENZE COGNITIVE

CdL IN SCIENZE E TECNICHE DI PSICOLOGIA COGNITIVA
 CdL IN INTERFACCE E TECNOLOGIE DELLA COMUNICAZIONE
 CdL IN FILOSOFIA

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA (CON ELEMENTI DI ALGEBRA)

A.A. 2012-2013 — ROVERETO, 24 GIUGNO 2013

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **TRE ORE**.

Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.

È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.

Potete usare solo il vostro materiale di scrittura e il vostro materiale di studio. Non usate il colore rosso.

- 1) i) Scrivete in matematica la seguente proposizione: "Se nelle regioni italiane settentrionali continua a piovere, i danni alle colture agricole e al turismo saranno ingenti". Scrivete poi la sua negazione sia in matematica (portando il 'non' il più internamente possibile) che in italiano corrente.
- ii) Sia \mathcal{A} una proposizione. Provate che la proposizione " $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}$ ", nota come legge dell'identità, è una tautologia.

-
- 2) i) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano l'insieme A determinato dal seguente sistema di disequazioni

$$\begin{cases} y \leq |x| + 1 \\ 4x^2 + 4y^2 - 8y + 3 > 0 \\ \frac{x^2}{4} + (y - 1)^2 \leq 1. \end{cases}$$

- ii) Determinate l'equazione di tutte le rette verticali che non intersecano mai l'insieme A .
-

3) i) Risolvete in \mathbb{R} le seguenti disequazioni/equazioni:

$$x|x-1| \geq x^2 - 6; \quad \log_2(3^x - 1) \leq 3; \quad \frac{2^{-x}2^{|x|+1}}{2^{x^2}} = 4.$$

ii) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano una funzione $f : [1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, crescente e convessa tale che la sua funzione integrale definita da $F(x) = \int_1^x f(t) dt$ per $x \in [1, 4]$ risulti decrescente sull'intervallo $[1, 3]$ e crescente sull'intervallo $[3, 4]$.

4) Siano $f : [-2, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ le funzioni definite da

$$f(x) = \begin{cases} 2^{x+2} & \text{se } -2 \leq x < 0 \\ 4 & \text{se } x = 0 \\ 2\sqrt{x+4} & \text{se } 0 < x \leq 5; \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} -x^2 + 2 & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

i) Rappresentatele graficamente nel piano cartesiano.

ii) Provate che f è continua in $x = 0$.

iii) Determinate l'immagine di f .

iv) Rappresentate graficamente la funzione inversa $f^{-1} : f([-2, 5]) \rightarrow [-2, 5]$, dopo aver giustificato l'esistenza di f^{-1} .

v) Calcolate $\int_0^5 f(x) dx$.

vi) Determinate il massimo e il minimo (risp. i punti di massimo e i punti di minimo) di g su \mathbb{R} .

vii) Determinate $(f \circ g)(1)$. Determinate, dove esiste, la funzione $(g \circ f)(x)$.

5) i) Sia $g : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da $g(x) = \sqrt{x}$. Calcolate $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{g(h) - g(0)}{h}$.
Determinate $g'_+(0)$.

ii) Studiate (insieme di definizione, segno, comportamento agli estremi dell'insieme di definizione, continuità, derivabilità, punti critici e monotonia, convessità/concavità) la funzione definita da

$$f(x) = (x - 2)\sqrt{x}$$

e rappresentatela graficamente nel piano cartesiano.

iii) Determinate l'area della regione piana delimitata dal grafico di f e dalla retta di equazione $y = 0$.

6) Anna, Barbara, Claudia e Giulia fanno una gara di corso tra loro. Quante sono tutte le possibili classifiche finali?
