

Università degli Studi di Trento - Facoltà di Scienze Cognitive
 CdL in Scienze e Tecniche di Psicologia Cognitiva
 CdL in Interfacce e Tecnologie delle Comunicazioni - CdL in Filosofia
 a.a. 2012-2013 - Rovereto, 13 settembre 2013

FILA (A)

1) i) a) "Ogni anno tutte le famiglie italiane vanno in vacanza da qualche parte (in (almeno) un posto)."

b) "Ogni anno (almeno) una famiglia italiana va in vacanza a Cortina d'Ampezzo."

c) "C'è (almeno) una famiglia italiana che ogni anno va in vacanza a Cortina d'Ampezzo."

Gli enunciati b) e c) non sono equivalenti (in c) si dice che la stessa famiglia va ogni anno in vacanza a Cortina d'Ampezzo, mentre in b) no). $\square$

ii) La proposizione è VERA: infatti, ogni funzione $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua soddisfa $\min_{[a,b]} f \leq f(x) \leq \max_{[a,b]} f \quad \forall x \in [a,b]$. $\blacksquare$

$$2) A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - |x| < 0\}$$

$$= \underline{\underline{]-1, 1[\setminus \{0\}}}$$

$$x^2 - |x| < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - x < 0 \end{cases} \circ \begin{cases} x < 0 \\ x^2 + x < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 0 < x < 1 \end{cases} \circ \begin{cases} x < 0 \\ -1 < x < 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow \quad \Downarrow$$

$$]0, 1[\quad]-1, 0[$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} : \log_3(x^2 - 1) < 1\}$$

$$= \underline{\underline{]-2, -1[\cup]1, 2[}}$$

$$\begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ x^2 - 1 < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 > 1 \\ x^2 < 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \text{ o } x > 1 \\ -2 < x < 2 \end{cases}$$

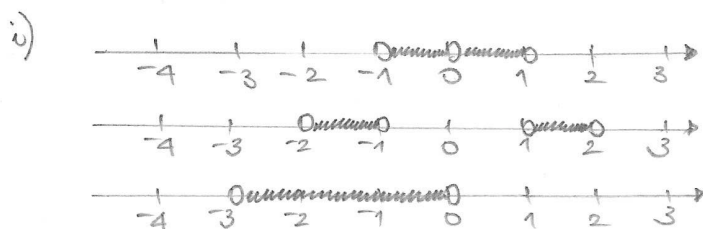
$$C = \{x \in \mathbb{R} : 2^{x^2} < \left(\frac{1}{2}\right)^{3x}\}$$

$$= \underline{\underline{]-3, 0[}}$$

$$2^{x^2} < 2^{-3x} \Leftrightarrow x^2 < -3x$$

$$2^{x^2} \uparrow \quad 2^{-3x} \downarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 3x < 0 \Leftrightarrow -3 < x < 0.$$



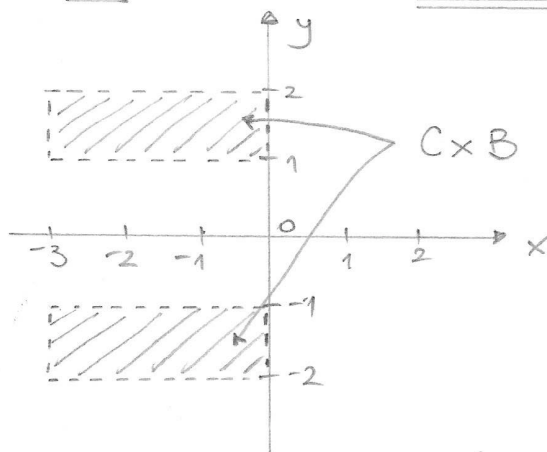
$$A = A$$

$$B = B$$

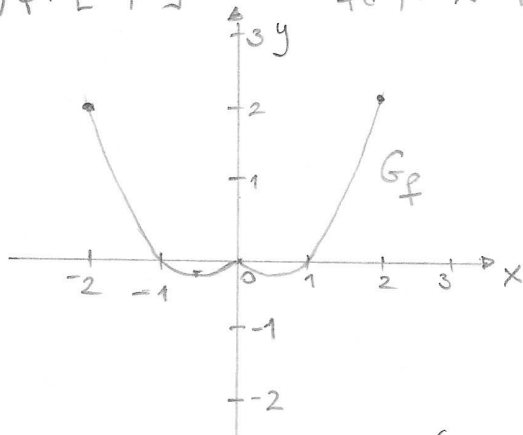
$$C = C$$



ii) $A \cap B = \emptyset$; $A \setminus C =]0, 1[$.

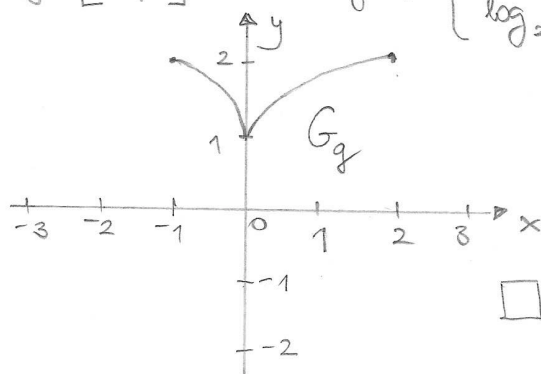


3) i) $f: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = x^2 - |x| = \begin{cases} x^2 + x & \text{se } -2 \leq x < 0 \\ x^2 - x & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$



$$= \begin{cases} (x + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} & \text{se } -2 \leq x < 0 \\ (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$g: [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ $g(x) = \begin{cases} -\sqrt[3]{x} + 1 & \text{se } -1 \leq x < 0 \\ \log_2(x+2) & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$

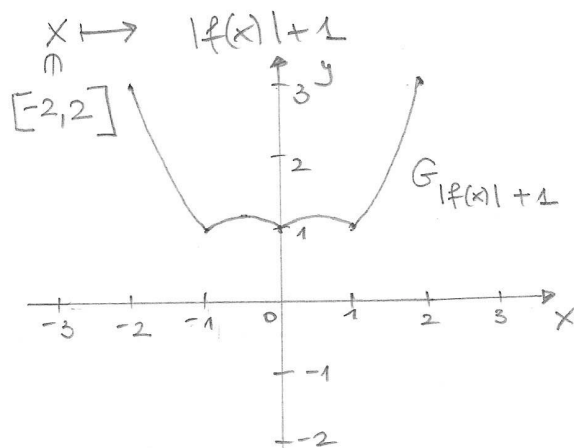
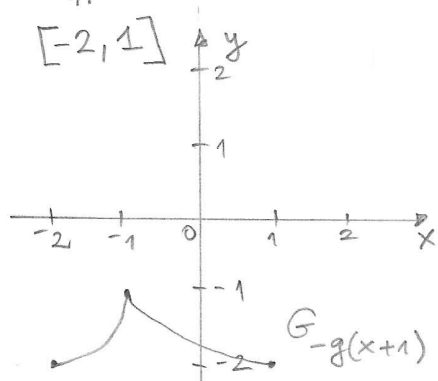


ii) se $k < -\frac{1}{4}$ $\nexists$ soluz. di $f(x) = k$;
 se $k = -\frac{1}{4}$ Sono 2 soluz. " ;
 se $-\frac{1}{4} < k < 0$ Sono 4 soluz. " ;
 se $k = 0$ Sono 3 soluz. " ;
 se $0 < k \leq 2$ Sono 2 soluz. " ;
 se $k > 2$ Sono 0 soluz. " ;



iii) f è continua (somma di fns. continue) su $[-2, 2]$; quindi f soddisfa le ipotesi del teorema di Weierstrass. $\square$

iv) $x \mapsto -g(x+1)$



v) $\int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 (x^2 - x) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_0^2 = \frac{8}{3} - 2 = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$

$\sum_{n=0}^6 g((-1)^n) = g(1) + g(-1) + g(1) + g(-1) + g(1) + g(-1) + g(1)$
 $= 4g(1) + 3g(-1) = 4 \log_2 3 + 3 \cdot 2 = \underline{\underline{4 \log_2 3 + 6}}$ $\square$

vi) $(f+g)(2) \doteq f(2) + g(2) = 2 + 2 = \underline{\underline{4}}$;

$(f \circ g)(2) \doteq f(g(2)) = f(2) = \underline{\underline{2}}$;

$\left(\frac{f}{g}\right)(-1) \doteq \frac{f(-1)}{g(-1)} = \frac{0}{2} = \underline{\underline{0}}$;

$\left(\frac{g}{f}\right)(-1) \nexists$ poiché $f(-1) = 0$! $\blacksquare$

4) i) $\begin{array}{cccccccccccc} - & - & - & + & + & + & + & - & - & - \\ -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \rightarrow f'(x)$ $\square$

ii) a) Poiché $f(x) \geq 0$ su $[-4, 4]$ e si annulla solo per $x = -2$, segue subito dalla definizione di $F(x)$ e l'interpretazione geometrica dell'integrale (oppure usando il Teorema fond. del calcolo per cui $F'(x) = f(x) \forall x \in [-4, 4]$) che $F(x)$ è (strettamente) crescente su $[-4, 4]$. $\square$

b) Rimetta $F(-4) = \underline{\underline{0}}$ minimo e $x = -4$ pt. di minimo;

$$F(4) = \int_{-4}^4 f(t) dt = 2 \cdot \frac{2}{3} + 2 \cdot \frac{4}{3} + 4 \cdot 1 = \underline{8} \quad \text{massimo di } F$$

in $[-4, 4]$ e $x=4$ punto di massimo. ■

5) i) $f(x) = \frac{e^{x-1}}{e^{x^2-1}} - 1 = \frac{e^{-x^2+x}}{e^0} - 1$ • $\text{dom } f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

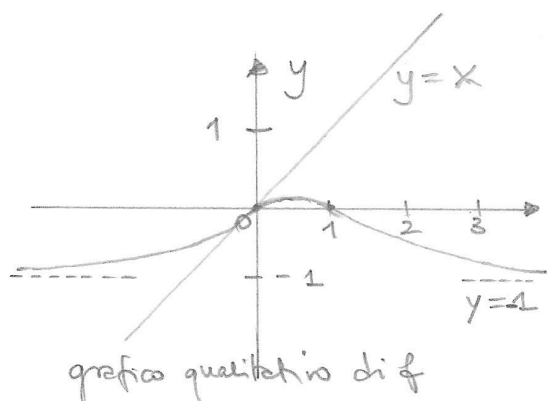
• segno di f : $e^{-x^2+x} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{-x^2+x} = e^0$

$$\Leftrightarrow -x^2+x=0 \Leftrightarrow x \in \{0, 1\}$$

$$e^{-x^2+x} - 1 > 0 \text{ se } e^{-x^2+x} > e^0 \Leftrightarrow$$

$$-x^2+x > 0 \Leftrightarrow x \in]0, 1[;$$

$$\begin{array}{ccccccc} - & - & - & + & - & - & - \\ -1 & 0 & 1 & 2 & & & \end{array} \quad f(x)$$



• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1 \Rightarrow$

$y = -1$ asint. orizz. per f , per $x \rightarrow \pm\infty$.

• f è continua in $\mathbb{R}$, essendo somma, composizione di funzioni continue in $\mathbb{R}$.

• $\text{dom } f' = \mathbb{R} \quad f'(x) = (-2x+1)e^{-x^2+x}$

$x = \frac{1}{2}$ pt. critico per f ;

è un pt. di massimo
loc. stretto e

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = e^{-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}} - 1 = e^{\frac{1}{4}} - 1 \sim 0.3$$

• $\text{dom } f'' = \mathbb{R} \quad f''(x) = -2e^{-x^2+x} + (-2x+1)^2 e^{-x^2+x}$
 $= e^{-x^2+x} (4x^2 - 4x - 1)$

$$\begin{aligned} 4x^2 - 4x - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow x_{1,2} &= \frac{4 \pm \sqrt{16+16}}{8} \\ &= \frac{4 \pm 4\sqrt{2}}{8} = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccccc} + & + & + & - & - & - & - \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & \\ \cup & & \cap & & \cup & & \end{array} \quad \begin{array}{c} f''(x) \\ f(x) \end{array}$$

ii) $y = x$ eq. retta tg. al grafico di f in $(0, 0)$. □

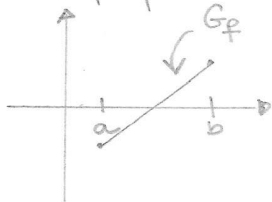
6) $C_{n,2} = \frac{n!}{(n-2)!2!} = 10 \Leftrightarrow n(n-1) = 20 \Leftrightarrow n^2 - n - 20 = 0$
 $\Rightarrow \underline{n=5}$ ■

FILA (B)

- 1) i) a) "Ogni anno tutte le città italiane organizzano (almeno) un avvenimento culturale",
 b) "Ogni anno (almeno) una città italiana organizza il Festival dell'Economia".
 c) C'è (almeno) una città italiana che ogni anno organizza il Festival dell'Economia".

Per enunciati b) e c) non sono equivalenti (in c) si dice che la stessa città organizza ogni anno il Festival dell'Economia, mentre in b) no). □

ii) La proposizione è FALSA:

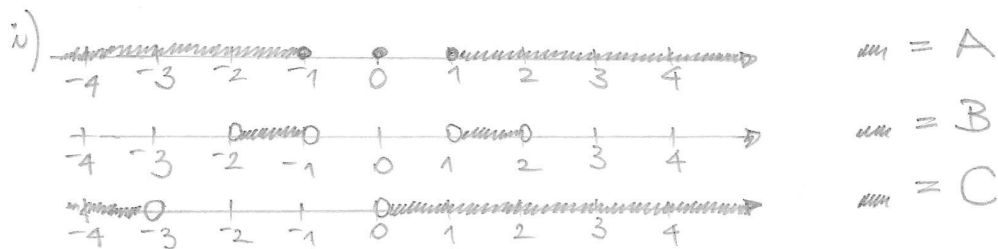


questo è un possibile controesempio. ■

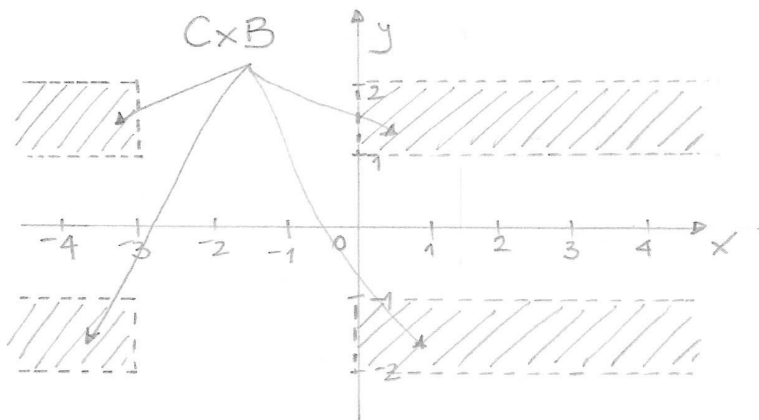
2) $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - |x| \geq 0\} =]-\infty, -1] \cup \{0\} \cup [1, +\infty[$;
 vedi FILA (A) Es. 2)

$B = \{x \in \mathbb{R} : \log_3(x^2 - 1) < 1\} =]-2, -1[\cup]1, 2[$;

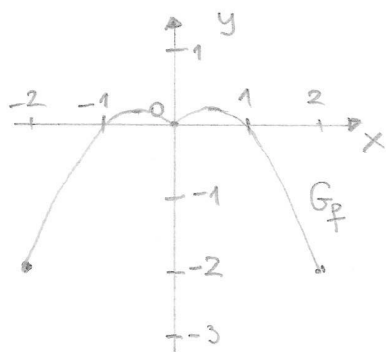
$C = \{x \in \mathbb{R} : 2^{x^2} > \left(\frac{1}{2}\right)^{3x}\} =]-\infty, -3[\cup]0, +\infty[$.



ii) $A \cap B =]-2, -1[\cap]1, 2[= \underline{\underline{B}}$;
 $A \setminus C = \underline{\underline{[-3, -1] \cup \{0\}}}$.

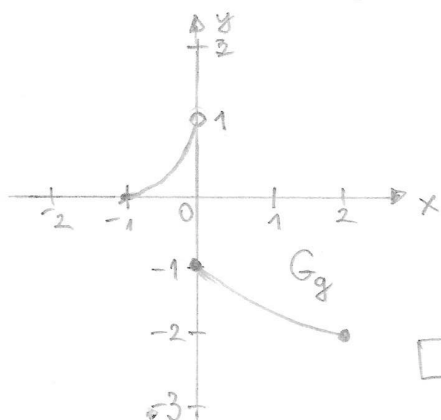


3) $f: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = -x^2 + |x| = \begin{cases} -x^2 - x & \text{se } -2 \leq x < 0 \\ -x^2 + x & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$



$$= \begin{cases} -(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4} & \text{se } -2 \leq x < 0 \\ -(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4} & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

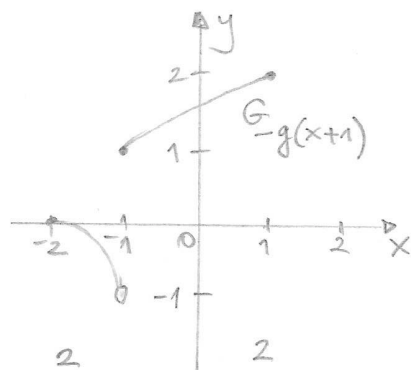
$g: [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ $g(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} + 1 & \text{se } -1 \leq x < 0 \\ -\log_2(x+2) & \text{se } 0 \leq x \leq 2. \end{cases}$



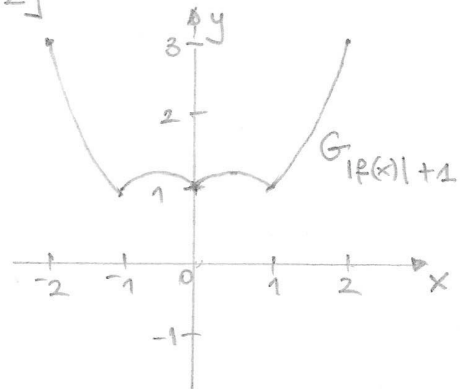
- ii) se $k < -2$ Nono soluz. di $f(x) = k$;
 se $-2 \leq k < 0$ Sono 2 soluz. " ;
 se $k = 0$ Sono 3 soluzioni " ;
 se $0 < k < \frac{1}{4}$ Sono 4 soluzioni " ;
 se $k = \frac{1}{4}$ Sono 2 soluz. " ;
 se $k > \frac{1}{4}$ Nono soluzioni " .

- iii) f è continua (somma di funzioni continue) su $[-2, 2]$;
 quindi f soddisfa le ipotesi del teorema di Weierstrass. $\square$

iv) $x \mapsto -g(x+1)$
 $\cap$
 $[-2, 1]$



$x \mapsto |f(x)| + 1$
 $\cap$
 $[-2, 2]$



v) $\int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 (-x^2 + x) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_0^2 = -\frac{8}{3} + 2 = \underline{\underline{-\frac{2}{3}}}$ □

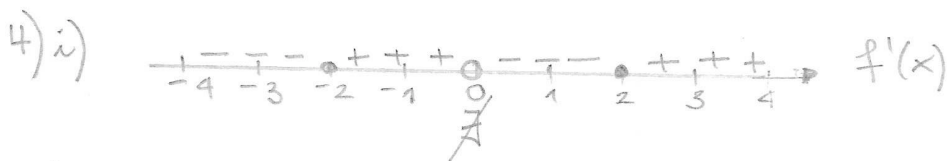
$\sum_{n=0}^6 g((-1)^n) = 4g(1) + 3g(-1) = -4\log_2 3 + 3 \cdot 0 = \underline{\underline{-4\log_2 3}}$ □

vi) $(f+g)(2) \doteq f(2) + g(2) = -2 - 2 = \underline{\underline{-4}};$

$(f \circ g)(2) \doteq f(g(2)) = f(-2) = \underline{\underline{-2}};$

$\left(\frac{f}{g}\right)(-1) \neq \text{poiché } g(-1) = 0;$

$\left(\frac{g}{f}\right)(-1) = \text{poiché } f(-1) = 0.$ ■



ii) a) Poiché $f(x) \geq 0$ in $[-4, 4]$ e si annulla solo per $x = -2$ e $x = 2$, segue subito dalla definizione di $F(x)$ e l'interpretazione geometrica dell'integrale (oppure usando il Teorema fond. del calcolo per cui $F'(x) = f(x) \forall x \in [-4, 4]$) che $F(x)$ è (strettamente) crescente in $[-4, 4]$. □

- b) Risultato $F(-4) = \underline{0}$ minimo e $x = -4$ pr. di minimo;
 $F(4) = \int_{-4}^4 f(t) dt = 4 \cdot \frac{2}{3} = \underline{\frac{8}{3}}$ massimo di F in $[-4, 4]$ e
 $x = 4$ punto di massimo. ■

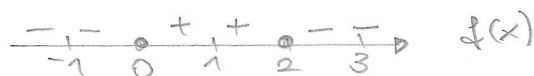
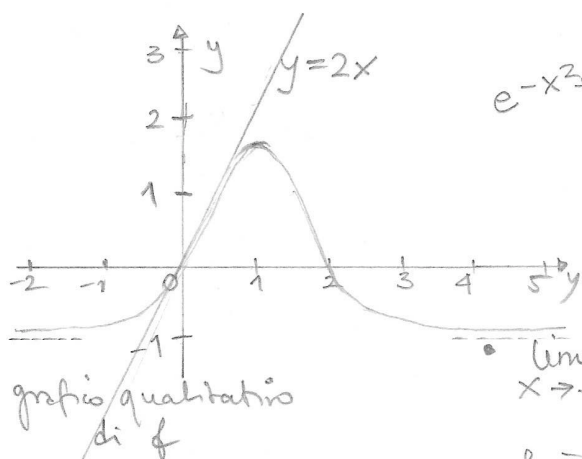
5) i) $f(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{x^2}-1} - 1 = \underline{\underline{\frac{e^{-x^2+2x}-1}{e^{x^2}-1}}}$ • $\text{dom } f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

• segno di f : $e^{-x^2+2x}-1 = 0 \Leftrightarrow e^{-x^2+2x} = e^0$

$\Leftrightarrow -x^2+2x = 0 \quad x \in \{0, 2\}$

$e^{-x^2+2x}-1 > 0 \Leftrightarrow e^{-x^2+2x} > e^0 \Leftrightarrow -x^2+2x > 0$

$\Leftrightarrow x \in]0, 2[$;



• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1 \Rightarrow y = -1$ asint. orizz. per f , per $x \rightarrow \pm\infty$.

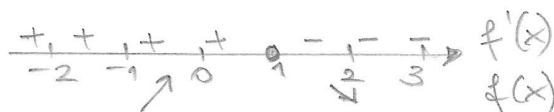
• f è continua in $\mathbb{R}$, essendo somma, composizione di funzioni continue in $\mathbb{R}$.

• $\text{dom } f' = \mathbb{R} \quad f'(x) = (-2x+2)e^{-x^2+2x}$

$x = 1$ pt. critico per f ;

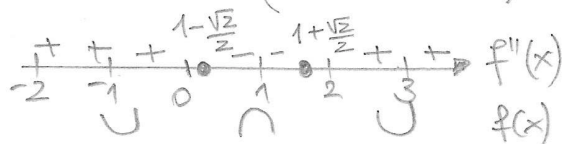
è un pt. di massimo loc. stretto e

$f(1) = e^{-1+2} - 1 = e - 1 \sim 1,7$



• $\text{dom } f'' = \mathbb{R} \quad f''(x) = -2e^{-x^2+2x} + (-2x+2)^2 e^{-x^2+2x}$
 $= e^{-x^2+2x} (4x^2 - 8x + 2)$

$2x^2 - 4x + 1 = 0$
 $\Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-8}}{4} = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{4}$
 $= 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$



ii) $y = 2x$ eq. retta tg. al grafico di f in $(0,0)$ ■

6) $C_{n,2} = \frac{n!}{(n-2)!2!} = 15 \Leftrightarrow n(n-1) = 30 \Leftrightarrow n^2 - n - 30 = 0$
 $\Rightarrow \underline{\underline{n = 6}}$ ■