

Università degli Studi di Trento - Facoltà di Scienze Cognitive
 CdL in Scienze e Tecnico di Psicologia Cognitiva
 CdL in Interfaccia e Tecnologie della Comunicazione - CdL in Filosofia
 ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA (CON ELEMENTI DI ALGEBRA)
 a.a. 2012/2013 - Romano, 24 giugno 2013

FILA (A)

1) i) siano A : "Nelle regioni italiane settentrionali continua a piovere".

B : "I danni alle colture agricole sono ingenti".

C : "I danni al turismo sono ingenti".

Allora la proposizione data si scrive in matematiche come segue " $A \Rightarrow (B \wedge C)$ ". Segue.

$$\text{non} [A \Rightarrow (B \wedge C)] \Leftrightarrow [A \wedge \text{non}(B \wedge C)] \Leftrightarrow$$

$$A \wedge [\text{non} B \vee \text{non} C].$$

La negazione della proposizione data in italiano corrente si scrive come segue: "Nelle regioni italiane settentrionali continua a piovere e i danni alle colture agricole non saranno ingenti o i danni al turismo non saranno ingenti".

ii) " $A \Rightarrow A$ " è una tautologia:

A $\vee$ F

A $\vee$ F

" $A \Rightarrow A$ " $\vee$ $\vee$



$$2) ii) \begin{cases} y \geq -x + 1 \\ 4x^2 + 4(y^2 - 2y) + 3 > 0 \\ \frac{x^2}{4} + (y-1)^2 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq -x + 1 \\ x^2 + 4(y-1)^2 - 4 + 3 > 0 \\ \frac{x^2}{4} + (y-1)^2 \leq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \geq -x + 1 \\ x^2 + (y-1)^2 > \frac{1}{4} \\ \frac{x^2}{4} + (y-1)^2 \leq 1 \end{cases}$$



ii) $x=k$ con $k \in]-\infty; 2] \cup]2; \infty[$.

iii) $x|x-1| \geq x^2-3 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x(x-1) \geq x^2-3 \end{cases} \quad x < 1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 3 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x < 1 \\ -x^2+x \geq x^2-3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 3 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x < 1 \\ 2x^2-x-3 \leq 0 \end{cases}$

$2x^2-x-3=0$

$x_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{4}$
 $= \frac{1 \pm 5}{4} \quad \begin{matrix} -1 \\ -\frac{3}{2} \end{matrix}$

$\Leftrightarrow \{1 \leq x \leq 3\} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x < 1 \\ -1 \leq x \leq \frac{3}{2} \end{cases}$

$S = [-1, 3]$

• $\log_2(3^x-1) \leq 3 \Leftrightarrow \log_2(3^x-1) \leq \log_2 8$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3^x-1 > 0 \\ 3^x-1 \leq 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x > 1 \Leftrightarrow x > 0 \\ 3^x \leq 9 \Leftrightarrow x \leq 2 \end{cases}$

$\Rightarrow \underline{S =]0, 2]}$

• $\frac{2^{-x} 2^{|x|+1}}{2^{x^2}} = 4$

$\Leftrightarrow 2^{-x+|x|+1-x^2} = 2^2 \quad \checkmark \quad 2^x \text{ è strett. crescente}$
 $\Leftrightarrow -x+|x|+1-x^2=2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ -x+x+1-x^2=2 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x < 0 \\ -x-x+1-x^2=2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2=-1 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x < 0 \\ x^2+2x+1=0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \uparrow \\ \text{impossibile!} \end{matrix} \quad \underline{S = \{-1\}}$

ii)

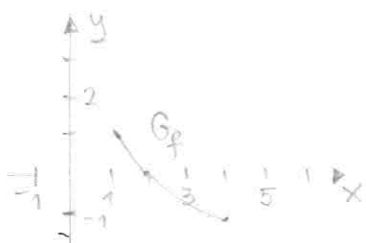


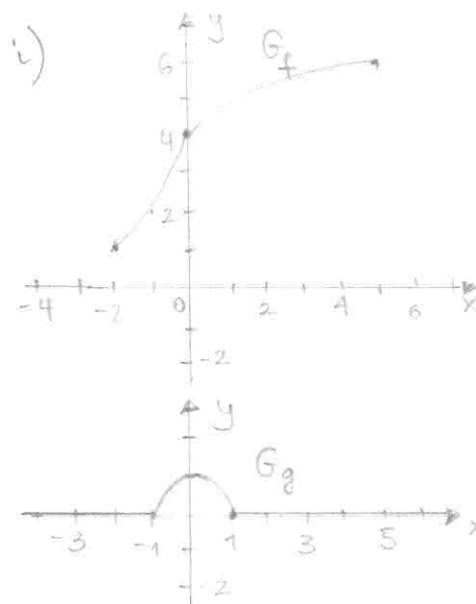
Grafico di una f ammissibile.
 (basta usare l'interpretazione geometrica dell'integr. e la definizione di $F(x)$, oppure il teorema fond. del calcolo $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [1, 4]$ poiché $f > 0$ su $[1, 2]$, risulta $F'(x) > 0$ su $[1, 2]$ e quindi F crescente; analogam. per la decrescenza di F

4) $f: [-2, 5] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 2^{x+2} & \text{se } -2 \leq x < 0 \\ 4 & \text{se } x = 0 \\ 2\sqrt{x+4} & \text{se } 0 < x \leq 5; \end{cases}$$

$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$g(x) = \begin{cases} -x^2 + 1 & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

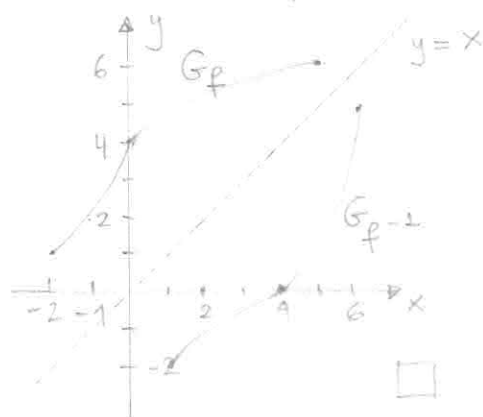


ii) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2^{x+2}) = 4$
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2\sqrt{x+4} = 4$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 4 = f(0)$
 e quindi f è continua in $x=0$ $\square$

iii) $f([-2, 5]) = \underline{\underline{[1, 6]}}$. $\square$

iv) f è iniettiva (è crescente su $[-2, 5]$); quindi $f: [-2, 5] \rightarrow [1, 6]$ è biettiva e quindi esiste $f^{-1}: [1, 6] \rightarrow [-2, 5]$.



v) $\int_0^5 f(x) dx = \int_0^5 2\sqrt{x+4} dx =$
 $= 2 \left[\frac{(x+4)^{3/2}}{3/2} \right]_0^5 = \frac{4}{3} [9^{3/2} - 4^{3/2}]$
 $= \frac{4}{3} (27 - 8) = \frac{19 \cdot 4}{3} = \underline{\underline{\frac{76}{3}}}$ $\square$

vi) $\min_{\mathbb{R}} g = \underline{\underline{0}}$ pt. di minimo $x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$. $\square$

$\max_{\mathbb{R}} g = \underline{\underline{1}}$ pt. di massimo $x=0$. $\square$

vii) $(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(0) = \underline{\underline{4}}$.

• $\text{dom } f = [-2, 5]$, $f([-2, 5]) = [1, 6] \subset \mathbb{R} = \text{dom } g$; quindi $g \circ f: [-2, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ è ben definita. Segue

$\underline{\underline{(g \circ f)(x) = g(\underbrace{f(x)}_{\geq 1}) = 0 \quad \forall x \in [-2, 5]}}$. $\blacksquare$

5) i) $g: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \sqrt{x}$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{h} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty;$$

Ne segue $g'_+(0) = +\infty$. □

ii) $f(x) = (x-1)\sqrt{x}$

• $\text{dom } f = [0, +\infty[$

• segno di f :



• $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

• f è continua su $[0, +\infty[$, essendo prodotto di funzioni continue su $[0, +\infty[$.

• $\text{dom } f' =]0, +\infty[$ ($\sqrt{x}$ non è derivabile, da destra, in 0).

$$f'(x) = \sqrt{x} + (x-1) \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2x + x - 1}{2\sqrt{x}} = \frac{3x - 1}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \text{ pt. critico per } f$$

$x = \frac{1}{3}$ è pt. di minimo loc. stretto per f .

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{3} \sqrt{\frac{1}{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{9} \approx -0.4$$

• $\text{dom } f'' =]0, +\infty[$

$$f''(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{3\sqrt{x}}{x} - (3x-1) \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{6x - 3x + 1}{2x\sqrt{x}} \right)$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{3x+1}{x\sqrt{x}} > 0 \quad \forall x \in]0, +\infty[, \text{ quindi } f \text{ è convessa su }]0, +\infty[.$$

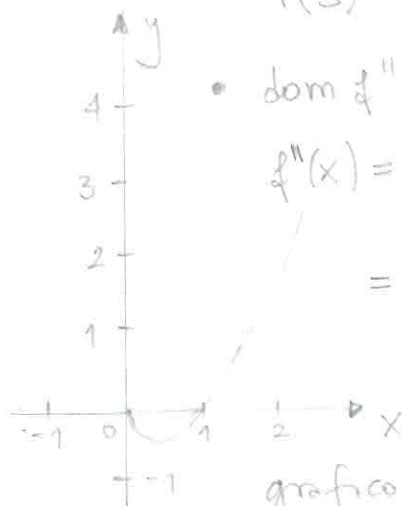
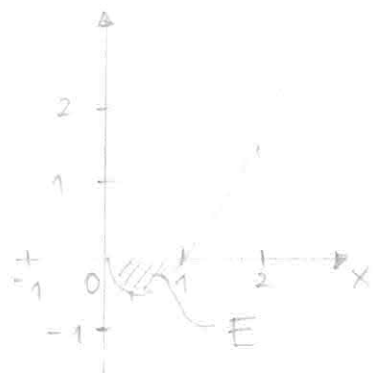


grafico qualitativo di f □



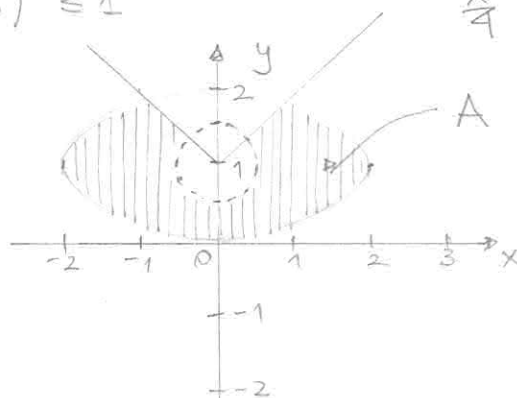
$$\begin{aligned} \text{area } E &= \int_0^1 (0 - f(x)) dx = - \int_0^1 (x-1)\sqrt{x} dx \\ &= - \int_0^1 (x^{3/2} - x^{1/2}) dx = \\ &= - \left[\frac{x^{5/2}}{5/2} - \frac{x^{3/2}}{3/2} \right]_0^1 = - \left[\frac{2}{5} - \frac{2}{3} \right] = \\ &= - \left[\frac{6}{15} - \frac{10}{15} \right] = \underline{\underline{\frac{4}{15}}} \end{aligned}$$

6) $P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = \underline{\underline{120}} \quad (= D_{5,5})$

FILA (B)

1) i) ii) Vedi FILA (A), Es. 1

$$\begin{aligned} 2) i) \quad & \begin{cases} y \leq |x| + 1 \\ 4x^2 + 4(y^2 - 2y) + 3 > 0 \\ \frac{x^2}{4} + (y-1)^2 \leq 1 \end{cases} \iff \begin{cases} y \leq |x| + 1 \\ x^2 + (y-1)^2 > \frac{1}{4} \\ \frac{x^2}{4} + (y-1)^2 \leq 1 \end{cases} \end{aligned}$$



ii) $x = k$ con $k \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$

$$\begin{aligned} 3) i) \quad & x|x-1| \geq x^2 - 6 \iff \begin{cases} x \geq 1 \\ x(x-1) \geq x^2 - 6 \end{cases} \circ \begin{cases} x < 1 \\ -x(x-1) \geq x^2 - 6 \end{cases} \\ & \iff \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - x \geq x^2 - 6 \end{cases} \circ \begin{cases} x < 1 \\ 2x^2 - x - 6 \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

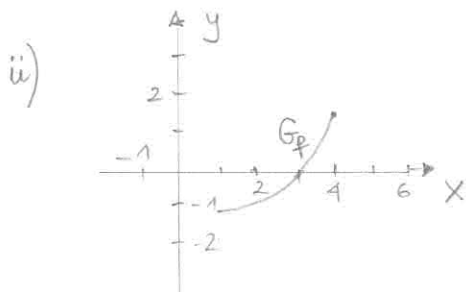
$$\begin{aligned} 2x^2 - x - 6 &= 0 \\ x_{1/2} &= \frac{1 \pm \sqrt{1 + 48}}{4} = \frac{1 \pm 7}{4} = \begin{cases} 2 \\ -\frac{3}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 6 \end{cases} \quad \circ \quad \begin{cases} x < 1 \\ -\frac{3}{2} \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$$S = \left[-\frac{3}{2}, 6\right]$$

• $\log_2(3^x - 1) \leq 3$ $S =]0, 2]$ (vedi FILA (A), Es. 3 i))

• $\frac{2^{-x} 2^{|x|+1}}{2^{x^2}} = 4$ $S = \{-1\}$ (vedi FILA (A), Es. 3 i)) $\square$



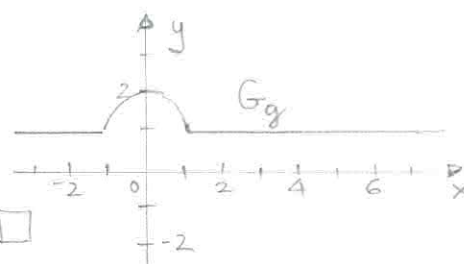
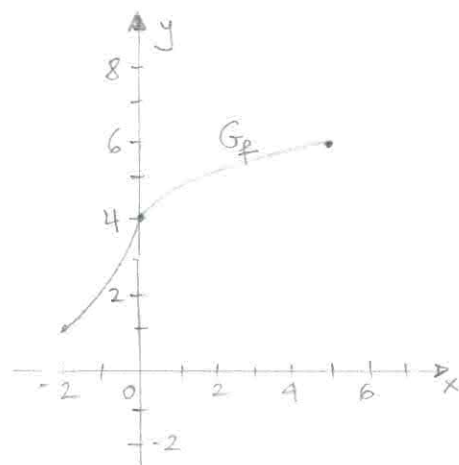
Grapho di una funzione f ammissibile

4) $f: [-2, 5] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 2^{x+2} & \text{se } -2 \leq x < 0 \\ 4 & \text{se } x = 0 \\ 2\sqrt{x+4} & \text{se } 0 < x \leq 5; \end{cases}$$

$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$g(x) = \begin{cases} -x^2 + 2 & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$



ii) - v) vedi FILA (A), Es. 4 ii) - v). $\square$

vi) $\min_{\mathbb{R}} g = 1$ pt. di minimo $x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.

$\max_{\mathbb{R}} g = 2$ pt. di massimo $x = 0$. $\square$

vii) • $(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(1) = \underline{\underline{2\sqrt{5}}}$.

• $g \circ f: [-2, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ è ben definito, perché $f([-2, 5]) = [1, 6]$ è contenuto in $\mathbb{R} = \text{dom } g$. Si ha

$$\underline{\underline{(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 1 \quad \forall x \in [-2, 5]}}$$

5) i) Vedi FILA (A), Es. 5) i).

ii) $f(x) = (x-2)\sqrt{x}$

• $\text{dom } f = [0, +\infty[$

• segno di f



• $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

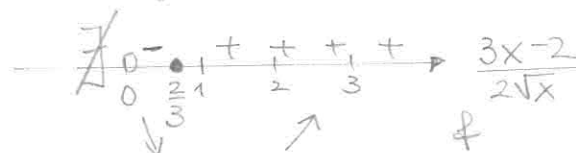
• f è continua su $[0, +\infty[$, essendo prodotto di funzioni continue su $[0, +\infty[$.

• $\text{dom } f' =]0, +\infty[$ ($\sqrt{x}$ non è derivabile, da destra, in 0).

$$f'(x) = \sqrt{x} + (x-2) \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2x + x - 2}{2\sqrt{x}} = \frac{3x - 2}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3} \text{ pt. critico per } f.$$

$x = \frac{2}{3}$ è pt. di min. loc.
stretto per f .



$$f\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} \sim -1$$

• $\text{dom } f'' =]0, +\infty[$

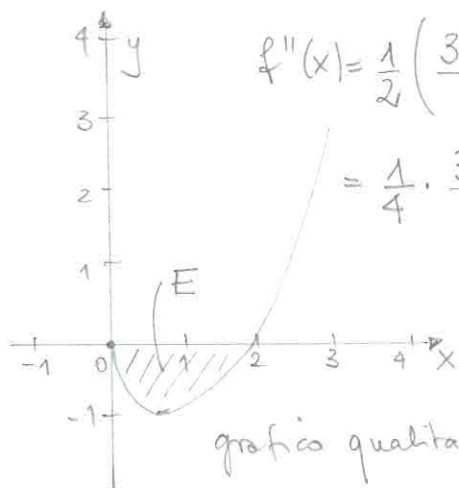


grafico qualitativo di f .

$$f''(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{3\sqrt{x} - (3x-2)\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{6x - 3x + 2}{2x\sqrt{x}} \right) =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{3x+2}{x\sqrt{x}} > 0 \quad \forall x \in]0, +\infty[, \text{ quindi } f \text{ è}$$

convessa su $]0, +\infty[$.

$$\begin{aligned} \text{ii) area } E &= \int_0^2 (0 - f(x)) dx = - \int_0^2 (x-2)\sqrt{x} dx \\ &= - \left[\frac{x^{5/2}}{5/2} - 2 \frac{x^{3/2}}{3/2} \right]_0^2 = - \left[\frac{8\sqrt{2}}{5} - \frac{8\sqrt{2}}{3} \right] \\ &= \frac{16\sqrt{2}}{15} \end{aligned}$$

6) $P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 = \underline{\underline{24}}$

(= $2_{4,4}$)