

COGNOME _____ NOME _____ MATRICOLA <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center; width: 100px;"> <tr> <td style="width: 20px; height: 20px;"></td> <td style="width: 20px; height: 20px;"></td> <td style="width: 20px; height: 20px;"></td> <td style="width: 20px; height: 20px;"></td> <td style="width: 20px; height: 20px;"></td> <td style="width: 20px; height: 20px;"></td> </tr> </table>							<div style="text-align: center; font-weight: bold;">NON SCRIVERE QUI</div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center; margin-top: 20px;"> <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center; width: 100px;"> <tr> <td style="width: 20px; height: 20px;"></td> <td style="width: 20px; height: 20px;"></td> <td style="width: 20px; height: 20px;"></td> </tr> <tr> <td style="font-size: 8px;">1</td> <td style="font-size: 8px;">2</td> <td style="font-size: 8px;">3</td> </tr> </table> <div style="border: 1px solid black; width: 100px; height: 100px; position: relative; margin-left: 20px;"> A </div> </div>				1	2	3
1	2	3											

UNIVERSITÀ DI TRENTO — FACOLTÀ DI SCIENZE COGNITIVE

CDL IN SCIENZE E TECNICHE DI PSICOLOGIA COGNITIVA
 CDL IN INTERFACCE E TECNOLOGIE DELLA COMUNICAZIONE
 CdL IN FILOSOFIA

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA (CON ELEMENTI DI ALGEBRA)

A.A. 2012-2013 — ROVERETO, 13 SETTEMBRE 2013

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **TRE ORE**.

Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.

È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.

Potete usare solo il vostro materiale di scrittura e il vostro materiale di studio. Non usate il colore rosso.

- 1) i) Sia $\mathcal{A}(x, y, z)$ il predicato definito da $\mathcal{A}(x, y, z) = \text{"Nell'anno } x \text{ la famiglia italiana } y \text{ va in vacanza nel luogo } z \text{"}$. Interpretate (usando l'italiano corrente) i seguenti enunciati:
- a) $\forall x, y, \exists z : \mathcal{A}(x, y, z)$.
 - b) $\forall x, \exists y : \mathcal{A}(x, y, \text{Cortina d'Ampezzo})$.
 - c) $\exists y : \forall x, \mathcal{A}(x, y, \text{Cortina d'Ampezzo})$.
- Gli enunciati b) e c) sono equivalenti?
- ii) Dite se la seguente proposizione è vera o falsa (motivando la risposta): "Ogni funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua è limitata".

- 2) Siano dati gli insiemi

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - |x| < 0\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R} : \log_3(x^2 - 1) < 1\}, \quad C = \{x \in \mathbb{R} : 2^{x^2} < \left(\frac{1}{2}\right)^{3x}\}.$$

- i) Rappresentate sulla retta reale gli insiemi A , B e C .
- ii) Determinate gli insiemi $A \cap B$, $A \setminus C$. Rappresentate nel piano cartesiano xy l'insieme $C \times B$.

3) Siano $f : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ le funzioni definite da

$$f(x) = x^2 - |x| \text{ per } -2 \leq x \leq 2, \quad g(x) = \begin{cases} -\sqrt[3]{x} + 1 & \text{se } -1 \leq x < 0 \\ \log_2(x + 2) & \text{se } 0 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

i) Rappresentatele graficamente nel piano cartesiano.

ii) Determinate, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il numero delle soluzioni dell'equazione $f(x) = k$.

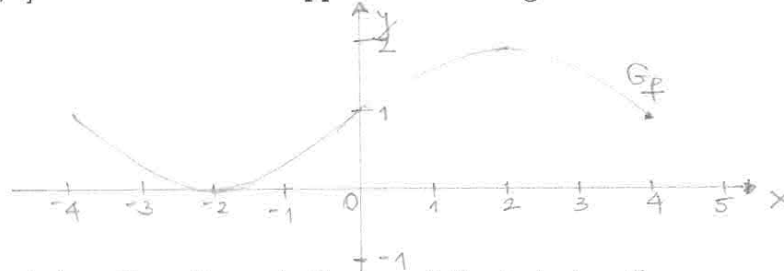
iii) Dite, motivando la risposta, se f soddisfa le ipotesi del teorema di Weierstrass su $[-2, 2]$.

iv) Rappresentate graficamente, nei rispettivi insiemi di definizione, le funzioni $x \mapsto -g(x+1)$ e $x \mapsto |f(x)| + 1$.

v) Calcolate $\int_0^2 f(x) dx$ e $\sum_{n=0}^6 g((-1)^n)$.

vi) Calcolate, se esistono, $(f+g)(2)$, $(f \circ g)(2)$, $\left(\frac{f}{g}\right)(-1)$ e $\left(\frac{g}{f}\right)(-1)$.

4) Sia $f : [-4, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione rappresentata in figura.



i) Rappresentate sulla retta reale il segno della derivata f' .

ii) Sia $F : [-4, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione integrale di f definita da $F(x) = \int_{-4}^x f(t) dt$.

a) Determinate gli intervalli di monotonia di F .

b) Sia $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -4 \leq x \leq -2, 0 \leq y \leq f(x)\}$ e sia $\text{area}(E) = 2/3$. Determinate il minimo e il massimo (risp. i punti di minimo e i punti di massimo) di F su $[-4, 4]$.

5) i) Studiate (insieme di definizione, segno, comportamento agli estremi dell'insieme di definizione, continuità, derivabilità, punti critici e monotonia, convessità/concavità) la funzione definita da

$$f(x) = \frac{e^{x-1}}{e^{x^2-1}} - 1$$

e rappresentatela graficamente nel piano cartesiano.

ii) Determinate l'equazione della retta tangente al grafico della funzione nel punto $(0, 0)$.

6) Se sono 10 le possibili coppie diverse che possono giocare a ping-pong, quanti sono i bambini presenti in un parco giochi?

COGNOME _____
NOME _____
MATRICOLA

--	--	--	--	--	--

NON SCRIVERE QUI

1	2	3

B

UNIVERSITÀ DI TRENTO — FACOLTÀ DI SCIENZE COGNITIVE

CdL IN SCIENZE E TECNICHE DI PSICOLOGIA COGNITIVA
CdL IN INTERFACCE E TECNOLOGIE DELLA COMUNICAZIONE
CdL IN FILOSOFIA

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA (CON ELEMENTI DI ALGEBRA)

A.A. 2012-2013 — ROVERETO, 13 SETTEMBRE 2013

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **TRE ORE**.

Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.

È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.

Potete usare solo il vostro materiale di scrittura e il vostro materiale di studio. Non usate il colore rosso.

- 1) i) Sia $\mathcal{A}(x, y, z)$ il predicato definito da $\mathcal{A}(x, y, z) = \text{"Nell'anno } x \text{ la città italiana } y \text{ organizza l'avvenimento culturale } z\text{"}$. Interpretate (usando l'italiano corrente) i seguenti enunciati:
- a) $\forall x, y, \exists z : \mathcal{A}(x, y, z)$.
 - b) $\forall x, \exists y : \mathcal{A}(x, y, \text{Festival dell'Economia})$.
 - c) $\exists y : \forall x, \mathcal{A}(x, y, \text{Festival dell'Economia})$.
- Gli enunciati b) e c) sono equivalenti?
- ii) Dite se la seguente proposizione è vera o falsa (motivando la risposta): "Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua e $\int_a^b f(x) dx = 0$, allora $f(x) = 0$ per ogni $x \in [a, b]$."

- 2) Siano dati gli insiemi

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - |x| \geq 0\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R} : \log_3(x^2 - 1) < 1\}, \quad C = \{x \in \mathbb{R} : 2^{x^2} > \left(\frac{1}{2}\right)^{3x}\}.$$

- i) Rappresentate sulla retta reale gli insiemi A , B e C .
- ii) Determinate gli insiemi $A \cap B$, $A \setminus C$. Rappresentate nel piano cartesiano xy l'insieme $C \times B$.

3) Siano $f : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ le funzioni definite da

$$f(x) = -x^2 + |x| \text{ per } -2 \leq x \leq 2, \quad g(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} + 1 & \text{se } -1 \leq x < 0 \\ -\log_2(x+2) & \text{se } 0 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

i) Rappresentatele graficamente nel piano cartesiano.

ii) Determinate, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il numero delle soluzioni dell'equazione $f(x) = k$.

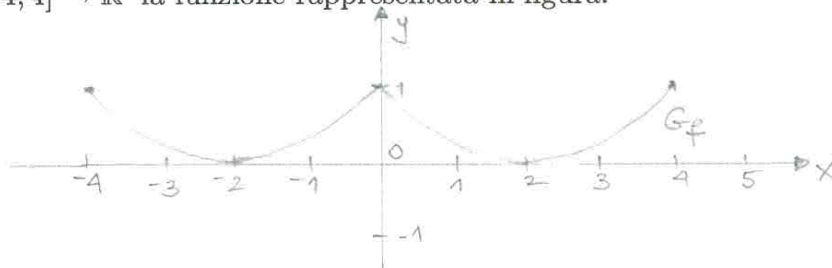
iii) Dite, motivando la risposta, se f soddisfa le ipotesi del teorema di Weierstrass su $[-2, 2]$.

iv) Rappresentate graficamente, nei rispettivi insiemi di definizione, le funzioni $x \mapsto -g(x+1)$ e $x \mapsto |f(x)| + 1$.

v) Calcolate $\int_0^2 f(x) dx$ e $\sum_{n=0}^6 g((-1)^n)$.

vi) Calcolate, se esistono, $(f+g)(2)$, $(f \circ g)(2)$, $(\frac{f}{g})(-1)$ e $(\frac{g}{f})(-1)$.

4) Sia $f : [-4, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione rappresentata in figura.



i) Rappresentate sulla retta reale il segno della derivata f' .

ii) Sia $F : [-4, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione integrale di f definita da $F(x) = \int_{-4}^x f(t) dt$.

a) Determinate gli intervalli di monotonia di F .

b) Sia $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -4 \leq x \leq -2, 0 \leq y \leq f(x)\}$ e sia $\text{area}(E) = 2/3$. Determinate il minimo e il massimo (risp. i punti di minimo e i punti di massimo) di F su $[-4, 4]$.

5) i) Studiate (insieme di definizione, segno, comportamento agli estremi dell'insieme di definizione, continuità, derivabilità, punti critici e monotonia, convessità/concavità) la funzione definita da

$$f(x) = \frac{e^{2x-1}}{e^{x^2-1}} - 1$$

e rappresentatela graficamente nel piano cartesiano.

ii) Determinate l'equazione della retta tangente al grafico della funzione nel punto $(0, 0)$.

6) Se sono 15 le possibili coppie diverse che possono giocare a biliardino, quanti sono i bambini presenti in un parco giochi?
