

COGNOME \_\_\_\_\_

NOME \_\_\_\_\_

MATRICOLA 

--	--	--	--	--	--	--

NON SCRIVERE QUI

A

1	2	3
---	---	---

UNIVERSITÀ DI TRENTO — FACOLTÀ DI SCIENZE COGNITIVE

CDL IN SCIENZE E TECNICHE DI PSICOLOGIA COGNITIVA

CDL IN INTERFACCE E TECNOLOGIE DELLA COMUNICAZIONE

CDL IN FILOSOFIA

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA (CON ELEMENTI DI ALGEBRA)

A.A. 2012-2013 — ROVERETO, 13 SETTEMBRE 2013

---

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **TRE ORE**.

**Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.**

**È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti;** al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.

**Potete usare solo il vostro materiale di scrittura e il vostro materiale di studio.** Non usate il colore rosso.

---

- 1) i) Sia  $\mathcal{A}(x, y, z)$  il predicato definito da  $\mathcal{A}(x, y, z) =$  "Nell'anno  $x$  la famiglia italiana  $y$  va in vacanza nel luogo  $z$ ". Interpretate (usando l'italiano corrente) i seguenti enunciati:
  - a)  $\forall x, y, \exists z : \mathcal{A}(x, y, z)$ .
  - b)  $\forall x, \exists y : \mathcal{A}(x, y, \text{Cortina d'Ampezzo})$ .
  - c)  $\exists y : \forall x, \mathcal{A}(x, y, \text{Cortina d'Ampezzo})$ .Gli enunciati b) e c) sono equivalenti?  
ii) Dite se la seguente proposizione è vera o falsa (motivando la risposta): "Ogni funzione  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua è limitata".

- 
- 2) Siano dati gli insiemi

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - |x| < 0\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R} : \log_3(x^2 - 1) < 1\}, \quad C = \{x \in \mathbb{R} : 2^{x^2} < \left(\frac{1}{2}\right)^{3x}\}.$$

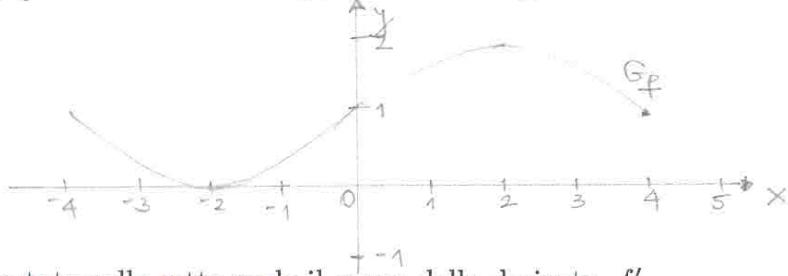
- i) Rappresentate sulla retta reale gli insiemi  $A$ ,  $B$  e  $C$ .
  - ii) Determinate gli insiemi  $A \cap B$ ,  $A \setminus C$ . Rappresentate nel piano cartesiano  $xy$  l'insieme  $C \times B$ .
-

- 3) Siano  $f : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  le funzioni definite da

$$f(x) = x^2 - |x| \text{ per } -2 \leq x \leq 2, \quad g(x) = \begin{cases} -\sqrt[3]{x} + 1 & \text{se } -1 \leq x < 0 \\ \log_2(x+2) & \text{se } 0 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

- i) Rappresentatele graficamente nel piano cartesiano.
- ii) Determinate, al variare di  $k \in \mathbb{R}$ , il numero delle soluzioni dell'equazione  $f(x) = k$ .
- iii) Dite, motivando la risposta, se  $f$  soddisfa le ipotesi del teorema di Weierstrass su  $[-2, 2]$ .
- iv) Rappresentate graficamente, nei rispettivi insiemi di definizione, le funzioni  $x \mapsto -g(x+1)$  e  $x \mapsto |f(x)| + 1$ .
- v) Calcolate  $\int_0^2 f(x) dx$  e  $\sum_{n=0}^6 g((-1)^n)$ .
- vi) Calcolate, se esistono,  $(f+g)(2)$ ,  $(f \circ g)(2)$ ,  $(\frac{f}{g})(-1)$  e  $(\frac{g}{f})(-1)$ .

- 4) Sia  $f : [-4, 4] \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione rappresentata in figura.



- i) Rappresentate sulla retta reale il segno della derivata  $f'$ .
- ii) Sia  $F : [-4, 4] \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione integrale di  $f$  definita da  $F(x) = \int_{-4}^x f(t) dt$ .
  - a) Determinate gli intervalli di monotonia di  $F$ .
  - b) Sia  $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -4 \leq x \leq -2, 0 \leq y \leq f(x)\}$  e sia  $\text{area}(E) = 2/3$ . Determinate il minimo e il massimo (risp. i punti di minimo e i punti di massimo) di  $F$  su  $[-4, 4]$ .

---

- 5) i) Studiate (insieme di definizione, segno, comportamento agli estremi dell'insieme di definizione, continuità, derivabilità, punti critici e monotonia, convessità/concavità) la funzione definita da
 
$$f(x) = \frac{e^{x-1}}{e^{x^2-1}} - 1$$
 e rappresentatela graficamente nel piano cartesiano.
  - ii) Determinate l'equazione della retta tangente al grafico della funzione nel punto  $(0, 0)$ .

---

- 6) Se sono 10 le possibili coppie diverse che possono giocare a ping-pong, quanti sono i bambini presenti in un parco giochi?

COGNOME \_\_\_\_\_

NOME \_\_\_\_\_

MATRICOLA | | | | | | |

NON SCRIVERE QUI

B

1	2	3
---	---	---

UNIVERSITÀ DI TRENTO — FACOLTÀ DI SCIENZE COGNITIVE

CDL IN SCIENZE E TECNICHE DI PSICOLOGIA COGNITIVA

CDL IN INTERFACCE E TECNOLOGIE DELLA COMUNICAZIONE

CDL IN FILOSOFIA

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA (CON ELEMENTI DI ALGEBRA)

A.A. 2012-2013 — ROVERETO, 13 SETTEMBRE 2013

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **TRE ORE**.

**Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.**

**È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti;** al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.

**Potete usare solo il vostro materiale di scrittura e il vostro materiale di studio.** Non usate il colore rosso.

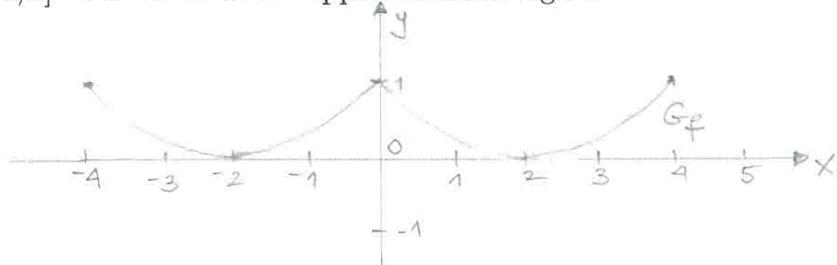
- 1) i) Sia  $\mathcal{A}(x, y, z)$  il predicato definito da  $\mathcal{A}(x, y, z) =$  "Nell'anno  $x$  la città italiana  $y$  organizza l'avvenimento culturale  $z$ ". Interpretate (usando l'italiano corrente) i seguenti enunciati:
- " $\forall x, y, \exists z : \mathcal{A}(x, y, z)$ ".
  - " $\forall x, \exists y : \mathcal{A}(x, y, \text{Festival dell'Economia})$ ".
  - " $\exists y : \forall x, \mathcal{A}(x, y, \text{Festival dell'Economia})$ ".
- Gli enunciati b) e c) sono equivalenti?
- ii) Dite se la seguente proposizione è vera o falsa (motivando la risposta): "Se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  è continua e  $\int_a^b f(x) dx = 0$ , allora  $f(x) = 0$  per ogni  $x \in [a, b]$ ".
- 2) Siano dati gli insiemi
- $$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - |x| \geq 0\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R} : \log_3(x^2 - 1) < 1\}, \quad C = \{x \in \mathbb{R} : 2^{x^2} > \left(\frac{1}{2}\right)^{3x}\}.$$
- Rappresentate sulla retta reale gli insiemi  $A$ ,  $B$  e  $C$ .
  - Determinate gli insiemi  $A \cap B$ ,  $A \setminus C$ . Rappresentate nel piano cartesiano  $xy$  l'insieme  $C \times B$ .

- 3) Siano  $f : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  le funzioni definite da

$$f(x) = -x^2 + |x| \quad \text{per } -2 \leq x \leq 2, \quad g(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} + 1 & \text{se } -1 \leq x < 0 \\ -\log_2(x+2) & \text{se } 0 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

- i) Rappresentatele graficamente nel piano cartesiano.
- ii) Determinate, al variare di  $k \in \mathbb{R}$ , il numero delle soluzioni dell'equazione  $f(x) = k$ .
- iii) Dite, motivando la risposta, se  $f$  soddisfa le ipotesi del teorema di Weierstrass su  $[-2, 2]$ .
- iv) Rappresentate graficamente, nei rispettivi insiemi di definizione, le funzioni  $x \mapsto -g(x+1)$  e  $x \mapsto |f(x)| + 1$ .
- v) Calcolate  $\int_0^2 f(x) dx$  e  $\sum_{n=0}^6 g((-1)^n)$ .
- vi) Calcolate, se esistono,  $(f+g)(2)$ ,  $(f \circ g)(2)$ ,  $(\frac{f}{g})(-1)$  e  $(\frac{g}{f})(-1)$ .

- 4) Sia  $f : [-4, 4] \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione rappresentata in figura.



- i) Rappresentate sulla retta reale il segno della derivata  $f'$ .
  - ii) Sia  $F : [-4, 4] \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione integrale di  $f$  definita da  $F(x) = \int_{-4}^x f(t) dt$ .
    - a) Determinate gli intervalli di monotonia di  $F$ .
    - b) Sia  $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -4 \leq x \leq -2, 0 \leq y \leq f(x)\}$  e sia  $\text{area}(E) = 2/3$ . Determinate il minimo e il massimo (risp. i punti di minimo e i punti di massimo) di  $F$  su  $[-4, 4]$ .
- 
- 5) i) Studiate (insieme di definizione, segno, comportamento agli estremi dell'insieme di definizione, continuità, derivabilità, punti critici e monotonia, convessità/concavità) la funzione definita da
- $$f(x) = \frac{e^{2x-1}}{e^{x^2-1}} - 1$$
- e rappresentatela graficamente nel piano cartesiano.
- ii) Determinate l'equazione della retta tangente al grafico della funzione nel punto  $(0, 0)$ .
- 
- 6) Se sono 15 le possibili coppie diverse che possono giocare a biliardino, quanti sono i bambini presenti in un parco giochi?