

COGNOME _____
 NOME _____
 MATRICOLA | | | | | | |

NON SCRIVERE QUI

1 2 3 4 5 6

B

UNIVERSITÀ DI TRENTO — FACOLTÀ DI SCIENZE COGNITIVE

CdL IN SCIENZE E TECNICHE DI PSICOLOGIA COGNITIVA
 CdL IN INTERFACCE E TECNOLOGIE DELLA COMUNICAZIONE
 CdL IN FILOSOFIA

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA (CON ELEMENTI DI ALGEBRA)

A.A. 2012-2013 — ROVERETO, 21 GENNAIO 2013

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **TRE ORE**.

Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.

È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.

Potete usare solo il vostro materiale di scrittura e il vostro materiale di studio. Non usate il colore rosso.

- 1) Siano $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ le seguenti funzioni definite da

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} - 1 & \text{se } x < -1 \\ \log_2(x+2) & \text{se } -1 \leq x \leq 0 \\ -x+1 & \text{se } x > 0; \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} -x^2 + 1 & \text{se } x \in [-2, 2] \\ -2 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus [-2, 2]. \end{cases}$$

- i) Rappresentate nel piano cartesiano il grafico di f e il grafico di g .
 ii) Determinate gli insiemi

$$A = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq -1\} \quad B = \{x \in \mathbb{R} : g(x) \leq 0\}$$

e rappresentateli sulla retta reale.

- iii) Determinate gli insiemi $A \cap B$, $A \cup B$ e $A \setminus B$.
 iv) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano l'insieme $A \times B$.

- 2) i) Rappresentate graficamente le funzioni $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definite da

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x+1} & \text{se } x < -1 \\ \log_2(x+2) & \text{se } -1 \leq x \leq 0 \\ 4^x & \text{se } x > 0; \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} |-x^2 + 1| & \text{se } x \in [-2, 2] \\ 2 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus [-2, 2]. \end{cases}$$

- ii) Determinate, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = k$.
 iii) Determinate l'immagine di g . Dite se g è suriettiva. g è iniettiva? (Motivate le risposte!!)
 iv) Determinate, se esistono, $(g \circ f)(-1)$, $(fg)(2)$ e $(f+g)(\frac{3}{2})$.
 v) Determinate $f(\mathbb{R})$. Rappresentate graficamente la funzione inversa $f^{-1} : f(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$.
 vi) Determinate, se esistono, il massimo e il minimo (risp. i punti di massimo e i punti di minimo) di f su $[-2, 1]$.

3) i) Calcolate

$$\int_0^1 \left(\frac{e^x}{e^x + 2} + \sqrt[4]{x} \right) dx; \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1}{x^2}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - 1}{x}.$$

ii) Calcolate l'area della regione piana E delimitata dai grafici delle funzioni $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definite da $f(x) = 4x^2 - 4$ e $g(x) = ||x| - 1|$, dopo aver rappresentato graficamente nel piano cartesiano f e g .

iii) Risolvete in \mathbb{R} le seguenti disequazioni:

$$\log(2 - x^2) + \log_{\frac{1}{e}}(|x|) < 0; \quad \log_2 32 < 5^{|x-1|-1}.$$

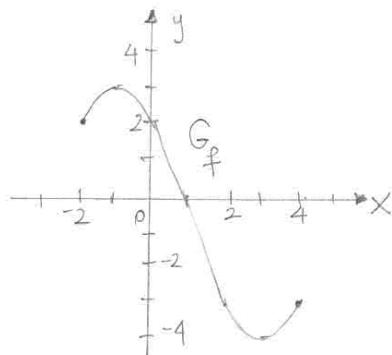
4) Sia $f : [-2, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione rappresentata in figura. Sia $F : [-2, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione integrale di f definita da $F(x) = \int_{-2}^x f(t) dt$.

i) Determinate gli intervalli di monotonia della funzione F .

ii) Determinate gli eventuali punti di massimo e punti di minimo locali di F .

iii) Tracciate un grafico qualitativo di F dopo aver individuato gli intervalli di convessità/concavità di F .

iv) Provate che $F(0) > 4$.



5) i) Studiate (insieme di definizione, segno, comportamento agli estremi dell'insieme di definizione, asintoti, continuità, derivabilità, punti critici e monotonia, convessità/concavità) la funzione definita da

$$f(x) = -\frac{x}{(x+1)^2}$$

e rappresentatela graficamente nel piano cartesiano.

ii) Determinate l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di coordinata $x = 0$ e rappresentatela graficamente nello stesso sistema di riferimento della f .

iii) Calcolate $\int_1^2 \frac{f'(x)}{f(x)} dx$.

6) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano l'insieme A delle coppie $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ soddisfacenti il seguente sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 \leq 4 \\ x^2 + y^2 + 4y + 3 > 0 \\ y < 2. \end{cases}$$

COGNOME	_____
NOME	_____
MATRICOLA	

NON SCRIVERE QUI

1	2	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---

C

UNIVERSITÀ DI TRENTO — FACOLTÀ DI SCIENZE COGNITIVE

CdL IN SCIENZE E TECNICHE DI PSICOLOGIA COGNITIVA
 CdL IN INTERFACCE E TECNOLOGIE DELLA COMUNICAZIONE
 CdL IN FILOSOFIA

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA (CON ELEMENTI DI ALGEBRA)

A.A. 2012-2013 — ROVERETO, 21 GENNAIO 2013

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **TRE ORE**.

Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.

È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.

Potete usare solo il vostro materiale di scrittura e il vostro materiale di studio. Non usate il colore rosso.

- 1) Siano $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ le seguenti funzioni definite da

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} - 1 & \text{se } x < -1 \\ 2 \log_2(x+2) & \text{se } -1 \leq x \leq 0 \\ -2x + 2 & \text{se } x > 0; \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x \in [-2, 2] \\ -2 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus [-2, 2]. \end{cases}$$

- i) Rappresentate nel piano cartesiano il grafico di f e il grafico di g .
 ii) Determinate gli insiemi

$$A = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq -1\} \quad B = \{x \in \mathbb{R} : g(x) \leq 0\}$$

e rappresentateli sulla retta reale.

- iii) Determinate gli insiemi $A \cap B$, $A \cup B$ e $A \setminus B$.
 iv) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano l'insieme $A \times A$.

- 2) i) Rappresentate graficamente le funzioni $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definite da

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x+1} & \text{se } x < -1 \\ 2 \log_2(x+2) & \text{se } -1 \leq x \leq 0 \\ 2^{x+1} & \text{se } x > 0; \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} |x^2 - 1| & \text{se } x \in [-2, 2] \\ 3 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus [-2, 2]. \end{cases}$$

- ii) Determinate, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = k$.
 iii) Determinate l'immagine di g . Dite se g è suriettiva. g è iniettiva? (Motivate le risposte!!)
 iv) Determinate, se esistono, $(g \circ f)(0)$, $(fg)(1)$ e $(f+g)(-9)$.
 v) Determinate $f(\mathbb{R})$. Rappresentate graficamente la funzione inversa $f^{-1} : f(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$.
 vi) Determinate, se esistono, il massimo e il minimo (risp. i punti di massimo e i punti di minimo) di f su $[-1, 2]$.

- 3) i) Calcolate

$$\int_0^1 \left(\frac{e^x}{e^x + 3} - \sqrt[5]{x} \right) dx; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{\sqrt{x}}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x}.$$

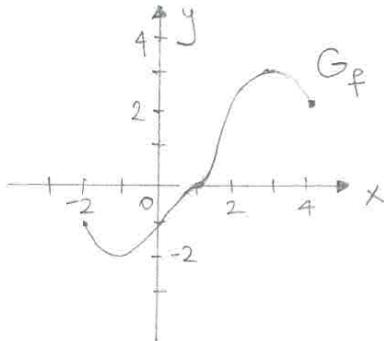
ii) Calcolate l'area della regione piana E delimitata dai grafici delle funzioni $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definite da $f(x) = 3x^2 - 3$ e $g(x) = ||x| - 1|$, dopo aver rappresentato graficamente nel piano cartesiano f e g .

iii) Risolvete in \mathbb{R} le seguenti disequazioni:

$$\log(3 - x^2) + \log_{\frac{1}{e}}(2|x|) < 0; \quad \log_2 64 < 6^{|x-3|-1}.$$

- 4) Sia $f : [-2, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione rappresentata in figura. Sia $F : [-2, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione integrale di f definita da $F(x) = \int_{-2}^x f(t) dt$.

- i) Determinate gli intervalli di monotonia della funzione F .
 ii) Determinate gli eventuali punti di massimo e punti di minimo locali di F .
 iii) Tracciate un grafico qualitativo di F dopo aver individuato gli intervalli di convessità/concavità di F .
 iv) Provate che $F(0) < -2$.



- 5) i) Studiate (insieme di definizione, segno, comportamento agli estremi dell'insieme di definizione, asintoti, continuità, derivabilità, punti critici e monotonia, convessità/concavità) la funzione definita da

$$f(x) = \frac{x}{(x-2)^2}$$

e rappresentatela graficamente nel piano cartesiano.

ii) Determinate l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di coordinata $x = 0$ e rappresentatela graficamente nello stesso sistema di riferimento della f .

iii) Calcolate $\int_{-2}^{-1} \frac{f'(x)}{f(x)} dx$.

- 6) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano l'insieme A delle coppie $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ soddisfacenti il seguente sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} -x^2 + y^2 \leq 4 \\ x^2 + 4x + y^2 + 3 > 0 \\ x < 2. \end{cases}$$