

COGNOME _____ NOME _____ MATRICOLA <table style="display: inline-table; border: 1px solid black; text-align: center; width: 100px;"> <tr><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td></tr> </table>							<div style="text-align: center; margin-bottom: 10px;">NON SCRIVERE QUI</div> <table style="display: inline-table; border: 1px solid black; text-align: center; width: 100px;"> <tr><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td></tr> <tr><td style="font-size: 8px;">1</td><td style="font-size: 8px;">2</td><td style="font-size: 8px;">3</td><td style="font-size: 8px;">4</td><td style="font-size: 8px;">5</td><td style="font-size: 8px;">6</td></tr> </table> <div style="display: inline-block; width: 80px; height: 60px; border: 1px solid black; vertical-align: middle; margin-top: 10px; text-align: center; line-height: 60px; font-size: 24px; font-weight: bold;">B</div>							1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6														

UNIVERSITÀ DI TRENTO — FACOLTÀ DI SCIENZE COGNITIVE

CdL IN SCIENZE E TECNICHE DI PSICOLOGIA COGNITIVA  
 CdL IN INTERFACCE E TECNOLOGIE DELLA COMUNICAZIONE  
 CdL IN FILOSOFIA

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA (CON ELEMENTI DI ALGEBRA)

A.A. 2012-2013 — ROVERETO, 21 GENNAIO 2013

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **TRE ORE**.

**Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.**

**È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti;** al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.

**Potete usare solo il vostro materiale di scrittura e il vostro materiale di studio.** Non usate il colore rosso.

- 1) Siano  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  le seguenti funzioni definite da

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} - 1 & \text{se } x < -1 \\ \log_2(x+2) & \text{se } -1 \leq x \leq 0 \\ -x+1 & \text{se } x > 0; \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} -x^2 + 1 & \text{se } x \in [-2, 2] \\ -2 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus [-2, 2]. \end{cases}$$

- i) Rappresentate nel piano cartesiano il grafico di  $f$  e il grafico di  $g$ .  
 ii) Determinate gli insiemi

$$A = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq -1\} \quad B = \{x \in \mathbb{R} : g(x) \leq 0\}$$

e rappresentateli sulla retta reale.

- iii) Determinate gli insiemi  $A \cap B$ ,  $A \cup B$  e  $A \setminus B$ .  
 iv) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano l'insieme  $A \times B$ .

- 2) i) Rappresentate graficamente le funzioni  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definite da

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x+1} & \text{se } x < -1 \\ \log_2(x+2) & \text{se } -1 \leq x \leq 0 \\ 4^x & \text{se } x > 0; \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} |-x^2 + 1| & \text{se } x \in [-2, 2] \\ 2 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus [-2, 2]. \end{cases}$$

- ii) Determinate, al variare di  $k \in \mathbb{R}$ , il numero di soluzioni dell'equazione  $f(x) = k$ .  
 iii) Determinate l'immagine di  $g$ . Dite se  $g$  è suriettiva.  $g$  è iniettiva? (Motivate le risposte!!)  
 iv) Determinate, se esistono,  $(g \circ f)(-1)$ ,  $(fg)(2)$  e  $(f+g)(\frac{3}{2})$ .  
 v) Determinate  $f(\mathbb{R})$ . Rappresentate graficamente la funzione inversa  $f^{-1} : f(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ .  
 vi) Determinate, se esistono, il massimo e il minimo (risp. i punti di massimo e i punti di minimo) di  $f$  su  $[-2, 1]$ .

3) i) Calcolate

$$\int_0^1 \left( \frac{e^x}{e^x + 2} + \sqrt[4]{x} \right) dx; \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1}{x^2}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - 1}{x}.$$

ii) Calcolate l'area della regione piana  $E$  delimitata dai grafici delle funzioni  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definite da  $f(x) = 4x^2 - 4$  e  $g(x) = ||x| - 1|$ , dopo aver rappresentato graficamente nel piano cartesiano  $f$  e  $g$ .

iii) Risolvete in  $\mathbb{R}$  le seguenti disequazioni:

$$\log(2 - x^2) + \log_{\frac{1}{e}}(|x|) < 0; \quad \log_2 32 < 5^{|x-1|-1}.$$

---

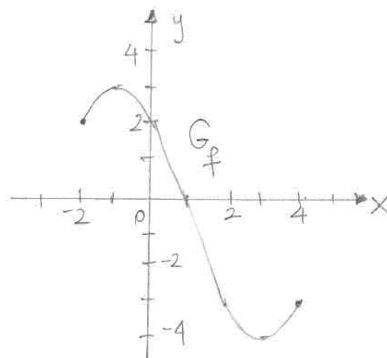
4) Sia  $f : [-2, 4] \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione rappresentata in figura. Sia  $F : [-2, 4] \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione integrale di  $f$  definita da  $F(x) = \int_{-2}^x f(t) dt$ .

i) Determinate gli intervalli di monotonia della funzione  $F$ .

ii) Determinate gli eventuali punti di massimo e punti di minimo locali di  $F$ .

iii) Tracciate un grafico qualitativo di  $F$  dopo aver individuato gli intervalli di convessità/concavità di  $F$ .

iv) Provate che  $F(0) > 4$ .



---

5) i) Studiate (insieme di definizione, segno, comportamento agli estremi dell'insieme di definizione, asintoti, continuità, derivabilità, punti critici e monotonia, convessità/concavità) la funzione definita da

$$f(x) = -\frac{x}{(x+1)^2}$$

e rappresentatela graficamente nel piano cartesiano.

ii) Determinate l'equazione della retta tangente al grafico di  $f$  nel punto di coordinata  $x = 0$  e rappresentatela graficamente nello stesso sistema di riferimento della  $f$ .

iii) Calcolate  $\int_1^2 \frac{f'(x)}{f(x)} dx$ .

---

6) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano l'insieme  $A$  delle coppie  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  soddisfacenti il seguente sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 \leq 4 \\ x^2 + y^2 + 4y + 3 > 0 \\ y < 2. \end{cases}$$

---

COGNOME _____ NOME _____ MATRICOLA <table style="display: inline-table; border: 1px solid black; text-align: center; width: 100px;"> <tr> <td style="width: 15px; height: 15px;"></td> <td style="width: 15px; height: 15px;"></td> <td style="width: 15px; height: 15px;"></td> <td style="width: 15px; height: 15px;"></td> <td style="width: 15px; height: 15px;"></td> <td style="width: 15px; height: 15px;"></td> </tr> </table>							<div style="text-align: center; margin-bottom: 10px;">NON SCRIVERE QUI</div> <table style="display: inline-table; border: 1px solid black; text-align: center; width: 100px;"> <tr> <td style="width: 15px; height: 15px;"></td> <td style="width: 15px; height: 15px;"></td> <td style="width: 15px; height: 15px;"></td> <td style="width: 15px; height: 15px;"></td> <td style="width: 15px; height: 15px;"></td> <td style="width: 15px; height: 15px;"></td> </tr> </table> <div style="display: inline-block; vertical-align: middle; margin-left: 20px;"> <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 80px; height: 60px;"> <tr> <td style="text-align: center; vertical-align: middle; font-weight: bold; font-size: 1.2em;">C</td> </tr> </table> </div>							C
C														

UNIVERSITÀ DI TRENTO — FACOLTÀ DI SCIENZE COGNITIVE

CdL IN SCIENZE E TECNICHE DI PSICOLOGIA COGNITIVA  
 CdL IN INTERFACCE E TECNOLOGIE DELLA COMUNICAZIONE  
 CdL IN FILOSOFIA

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA (CON ELEMENTI DI ALGEBRA)

A.A. 2012-2013 — ROVERETO, 21 GENNAIO 2013

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **TRE ORE**.

**Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.**

**È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti;** al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.

**Potete usare solo il vostro materiale di scrittura e il vostro materiale di studio.** Non usate il colore rosso.

- 1) Siano  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  le seguenti funzioni definite da

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} - 1 & \text{se } x < -1 \\ 2\log_2(x+2) & \text{se } -1 \leq x \leq 0 \\ -2x + 2 & \text{se } x > 0; \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x \in [-2, 2] \\ -2 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus [-2, 2]. \end{cases}$$

- i) Rappresentate nel piano cartesiano il grafico di  $f$  e il grafico di  $g$ .  
 ii) Determinate gli insiemi

$$A = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq -1\} \quad B = \{x \in \mathbb{R} : g(x) \leq 0\}$$

e rappresentateli sulla retta reale.

- iii) Determinate gli insiemi  $A \cap B$ ,  $A \cup B$  e  $A \setminus B$ .  
 iv) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano l'insieme  $A \times A$ .

- 2) i) Rappresentate graficamente le funzioni  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definite da

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x+1} & \text{se } x < -1 \\ 2\log_2(x+2) & \text{se } -1 \leq x \leq 0 \\ 2^{x+1} & \text{se } x > 0; \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} |x^2 - 1| & \text{se } x \in [-2, 2] \\ 3 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus [-2, 2]. \end{cases}$$

- ii) Determinate, al variare di  $k \in \mathbb{R}$ , il numero di soluzioni dell'equazione  $f(x) = k$ .  
 iii) Determinate l'immagine di  $g$ . Dite se  $g$  è suriettiva.  $g$  è iniettiva? (Motivate le risposte!!)  
 iv) Determinate, se esistono,  $(g \circ f)(0)$ ,  $(fg)(1)$  e  $(f+g)(-9)$ .  
 v) Determinate  $f(\mathbb{R})$ . Rappresentate graficamente la funzione inversa  $f^{-1} : f(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ .  
 vi) Determinate, se esistono, il massimo e il minimo (risp. i punti di massimo e i punti di minimo) di  $f$  su  $[-1, 2]$ .

3) i) Calcolate

$$\int_0^1 \left( \frac{e^x}{e^x + 3} - \sqrt[5]{x} \right) dx; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{\sqrt{x}}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x}.$$

ii) Calcolate l'area della regione piana  $E$  delimitata dai grafici delle funzioni  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definite da  $f(x) = 3x^2 - 3$  e  $g(x) = ||x| - 1|$ , dopo aver rappresentato graficamente nel piano cartesiano  $f$  e  $g$ .

iii) Risolvete in  $\mathbb{R}$  le seguenti disequazioni:

$$\log(3 - x^2) + \log_{\frac{1}{e}}(2|x|) < 0; \quad \log_2 64 < 6^{|x-3|-1}.$$

---

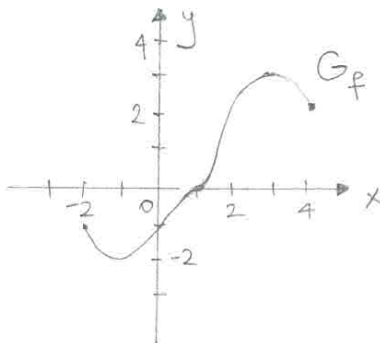
4) Sia  $f: [-2, 4] \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione rappresentata in figura. Sia  $F: [-2, 4] \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione integrale di  $f$  definita da  $F(x) = \int_{-2}^x f(t) dt$ .

i) Determinate gli intervalli di monotonia della funzione  $F$ .

ii) Determinate gli eventuali punti di massimo e punti di minimo locali di  $F$ .

iii) Tracciate un grafico qualitativo di  $F$  dopo aver individuato gli intervalli di convessità/concavità di  $F$ .

iv) Provate che  $F(0) < -2$ .



---

5) i) Studiate (insieme di definizione, segno, comportamento agli estremi dell'insieme di definizione, asintoti, continuità, derivabilità, punti critici e monotonia, convessità/concavità) la funzione definita da

$$f(x) = \frac{x}{(x-2)^2}$$

e rappresentatela graficamente nel piano cartesiano.

ii) Determinate l'equazione della retta tangente al grafico di  $f$  nel punto di coordinata  $x = 0$  e rappresentatela graficamente nello stesso sistema di riferimento della  $f$ .

iii) Calcolate  $\int_{-2}^{-1} \frac{f'(x)}{f(x)} dx$ .

---

6) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano l'insieme  $A$  delle coppie  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  soddisfacenti il seguente sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} -x^2 + y^2 \leq 4 \\ x^2 + 4x + y^2 + 3 > 0 \\ x < 2. \end{cases}$$

---