

COGNOME _____

NOME _____

MATRICOLA | | | | | | |

NON SCRIVERE QUI

1	2	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---

A

UNIVERSITÀ DI TRENTO — DIP. DI PSICOLOGIA E SCIENZE COGNITIVE
CDL IN SCIENZE E TECNICHE DI PSICOLOGIA COGNITIVA

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA

A.A. 2013-2014 — ROVERETO, 31 LUGLIO 2014

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **TRE ORE**.

Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.

È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.

Potete usare solo il vostro materiale di scrittura e il vostro materiale di studio. Non usate il colore rosso.

1) i) Siano date le proposizioni \mathcal{P} , \mathcal{Q} ed \mathcal{R} . Provate che la seguente proposizione

$$”[(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) \text{ e } (\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{R})] \Rightarrow (\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{R})”$$

è una tautologia.

ii) Scrivete in matematiche la seguente proposizione: "Se Marco Rossi supera l'esame di Analisi Matematica nella sessione d'esami estiva, si laurea entro dicembre 2014".

2) Siano dati gli insiemi

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \frac{x|x+1|-2}{\sqrt{x}} \leq 0\} \quad B = \{x \in \mathbb{R} : \log_3(x^2 - 2x) + \log_3|x| \leq 1 + \log_3 x\}.$$

i) Determinate A e B e rappresentateli sulla retta reale. Dite se sono insiemi limitati e se hanno massimo e/o minimo.

ii) Determinate $A \cup B$ e $A \setminus B$ e dite se sono intervalli.

iii) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano l'insieme $A \times B$.

- 3) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} e^x - 1 & \text{se } x < 0 \\ ax + b & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ -(x-2)^2 + 3 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

con a e $b \in \mathbb{R}$.

- i) Determinate a e b tale che f risulti una funzione continua su \mathbb{R} . Rappresentate poi graficamente la funzione f .
- ii) Calcolate $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h}$ e $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h}$. La funzione f è derivabile in $x = 0$?
- iii) Determinate l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di coordinata $x = 3$ e rappresentatela graficamente nello stesso sistema di riferimento della f .
- iv) Determinate, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il numero delle soluzioni dell'equazione $f(x) = k$.

- 4) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = xe^{3x}$.

i) Studiate brevemente la funzione f e rappresentatela graficamente.

ii) Provate che $F(x) = \left(\frac{x}{3} - \frac{1}{9}\right)e^{3x}$ è una primitiva di $f(x)$ su \mathbb{R} .

iii) Sia $f^{(n)}$ la derivata n -esima di f con $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$ (ossia $f^{(1)}$ è la derivata prima di f , $f^{(2)}$ la derivata seconda di f e così via). Calcolate

$$\sum_{n=1}^4 \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

iv) Sia x_0 il punto di minimo di f . Determinate l'area della regione piana E delimitata dal grafico di f , della retta di equazione $x = x_0$ e della retta di equazione $y + 2x = 0$.

- 5) i) Studiate (insieme di definizione, segno, comportamento agli estremi dell'insieme di definizione, continuità, derivabilità, punti critici e monotonia, convessità/concavità) la funzione definita da

$$f(x) = (x-1)^2(2x+3)$$

e rappresentatela graficamente nel piano cartesiano.

ii) Determinate il massimo e il minimo (risp. punti di massimo e punti di minimo) della funzione $|f(x)|$ su $[-2, 0]$.

iii) Determinate $\int_0^1 |f(x)| dx$.

- 6) Rappresentate graficamente una funzione continua $f : [-3, 2] \rightarrow [-1, 2]$ che soddisfi entrambe le seguenti proprietà:

i) f è biettiva;

ii) f è convessa ristretta all'intervallo $[-3, -1]$ e concava ristretta all'intervallo $[-1, 2]$.

La funzione f deve essere una funzione crescente?

COGNOME _____

NOME _____

MATRICOLA | | | | | |

NON SCRIVERE QUI

1	2	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---

B

UNIVERSITÀ DI TRENTO — DIP. DI PSICOLOGIA E SCIENZE COGNITIVE
CDL IN SCIENZE E TECNICHE DI PSICOLOGIA COGNITIVA

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA

A.A. 2013-2014 — ROVERETO, 31 LUGLIO 2014

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **TRE ORE**.

Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.

È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.

Potete usare solo il vostro materiale di scrittura e il vostro materiale di studio. Non usate il colore rosso.

1) i) Siano date le proposizioni \mathcal{A} , \mathcal{B} ed \mathcal{C} . Provate che la seguente proposizione

$$”[(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \text{ e } (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C})] \Rightarrow (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C})”$$

è una tautologia.

ii) Scrivete in matematiche la seguente proposizione: "Se Marco Rossi non supera l'esame di Analisi Matematica nella sessione d'esami estiva, non si laurea entro dicembre 2014".

2) Siano dati gli insiemi

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \frac{x|x+3|-4}{\sqrt{x}} \leq 0\} \quad B = \{x \in \mathbb{R} : \log_3(x^2 - 2x) + \log_3|x| \geq 1 + \log_3 x\}.$$

- i) Determinate A e B e rappresentateli sulla retta reale. Dite se sono insiemi limitati e se hanno massimo e/o minimo.
- ii) Determinate $A \cup B$ e $A \setminus B$ e dite se sono intervalli.
- iii) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano l'insieme $A \times B$.

- 3) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} e^x - 1 & \text{se } x < 0 \\ ax + b & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ -(x-2)^2 + 4 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

con a e $b \in \mathbb{R}$.

- i) Determinate a e b tale che f risulti una funzione continua su \mathbb{R} . Rappresentate poi graficamente la funzione f .
- ii) Calcolate $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h}$ e $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h}$. La funzione f è derivabile in $x = 0$?
- iii) Determinate l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di coordinata $x = 3$ e rappresentatela graficamente nello stesso sistema di riferimento della f .
- iv) Determinate, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il numero delle soluzioni dell'equazione $f(x) = k$.

- 4) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = xe^{4x}$.

i) Studiate brevemente la funzione f e rappresentatela graficamente.

ii) Provate che $F(x) = \left(\frac{x}{4} - \frac{1}{16}\right)e^{4x}$ è una primitiva di $f(x)$ su \mathbb{R} .

iii) Sia $f^{(n)}$ la derivata n -esima di f con $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$ (ossia $f^{(1)}$ è la derivata prima di f , $f^{(2)}$ la derivata seconda di f e così via). Calcolate

$$\sum_{n=1}^4 \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

iv) Sia x_0 il punto di minimo di f . Determinate l'area della regione piana E delimitata dal grafico di f , della retta di equazione $x = x_0$ e della retta di equazione $y + 3x = 0$.

- 5) i) Studiate (insieme di definizione, segno, comportamento agli estremi dell'insieme di definizione, continuità, derivabilità, punti critici e monotonia, convessità/concavità) la funzione definita da

$$f(x) = (x+1)^2(2x-3)$$

e rappresentatela graficamente nel piano cartesiano.

ii) Determinate il massimo e il minimo (risp. punti di massimo e punti di minimo) della funzione $|f(x)|$ su $[-2, 0]$.

iii) Determinate $\int_0^1 |f(x)| dx$.

- 6) Rappresentate graficamente una funzione continua $f : [-3, 2] \rightarrow [-1, 2]$ che soddisfi entrambe le seguenti proprietà:

i) f è biettiva;

ii) f è concava ristretta all'intervallo $[-3, -1]$ e convessa ristretta all'intervallo $[-1, 2]$.

La funzione f deve essere una funzione crescente?