

Diario del Corso di Analisi Matematica - a.a. 2013/14

- 16/09/13 (2 ore): Introduzione al corso: orario, esercitazioni, ricevimento studenti, sito web, tempi e modalità delle prove di valutazione (compitini in itinere, prova finale).
Proposizioni. Esempi. Connettivi logici (non, **e**, **o**, implicazione, doppia implicazione) e la loro tavola di verità. Proposizioni equivalenti. Proprietà di '**e**' ed '**o**' (commutativa, associativa, distributiva). La negazione ed '**e**'; la negazione ed '**o**'. La negazione e l'implicazione.
- 18/09/13 (2 ore): La negazione e l'implicazione. Applicazioni. Modus Ponens (Modus tollens). Predicati. Esempi. Predicati con più variabili. Esempi. Quantificatori (per ogni; esiste). Esempi. Quantificatori e predicati con più variabili. Negazione di una proposizione contenente quantificatori. Esercizi.
- 23/09/13 (2 ore): Terminologia sugli insiemi (enumerazione; mediante predicati). Simbolo di appartiene (\in) e di non appartiene (\notin). Esempi. Insiemi numerici: **N**, **Z**, **Q**, **R** (la retta reale). Insieme vuoto. Sottoinsiemi. Uguaglianza di insiemi. Gli intervalli limitati, gli intervalli illimitati e loro rappresentazione sulla retta reale. Esempi. Unione, intersezione, differenza di insiemi, complementare (diagrammi di Venn). Gli insiemi **R**⁺, **R**⁻. Esercizi di insiemistica (unione, intersezione, differenza di insiemi).
- 25/09/13 (2 ore): Esercizi di insiemistica. Proposizioni con quantificatori. Proprietà distributiva delle operazioni di unione ed intersezione. Leggi di de Morgan.
Insieme delle parti di un insieme. Esempi.
Prodotto cartesiano di due insiemi. Esempi. Il prodotto cartesiano **R** \times **R** (piano cartesiano; asse delle ascisse, asse delle ordinate). Rappresentazione grafica di sottoinsiemi di **R** \times **R**. Esercizi.
- 26/09/13 (2 ore): Algebra elementare dei numeri reali (l'operazione somma e l'operazione prodotto). Alcuni corollari.
La legge di annullamento del prodotto. Applicazioni della legge di annullamento del prodotto.
La relazione \leq (ordinamento totale) e la compatibilità dell'ordine con le operazioni di somma e prodotto. Esercizi vari (disuguaglianze in **R**; diseq. di primo grado; disequazioni razionali fratte (semplici)).
- 30/09/13 (2 ore): Dimostrazione che per ogni $x \in \mathbf{R}$ si ha $x^2 \geq 0$, e $x^2 = 0$ se e solo se $x=0$. Varie osservazioni sullo svolgimento corretto di una disequazione razionale fratta. Sistemi di disequazioni.
Rette: insieme dato da $\{(x,y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} : ax+by+c=0, a,b,c \in \mathbf{R} \text{ opportuni}\}$. Rette verticali, orizzontali (parallele e perpendicolari). Rette oblique e loro rappresentazione grafica. Rette parallele (perpendicolari) ad una retta obliqua.
Esercizi: disegnare rette; rappresentare graficamente l'insieme delle soluzioni di un sistema di disequazioni di primo grado.
- 02/10/13 (2 ore): Equazione della retta (verticale, orizzontale) passante per un punto. Equazione della retta di coefficiente angolare assegnato e passante per un punto. Esercizi. Equazione della retta passante per due punti.

Qualche esercizio sulle rette. Equazioni e disequazioni di primo grado a sistema. Interpretazione geometrica delle equazioni e disequazioni di primo grado.

- 03/10/13 (2 ore): Ancora qualche esercizio con le rette. Prodotti notevoli: $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, a^2-b^2 . Parabola. Equazione di una parabola (con asse di simmetria parallela all'asse delle ordinate) $y=ax^2+bx+c$ con $a \neq 0$. Rappresentazione grafica di $y=x^2$. Rappresentazione grafica di parabole semplici. Rappresentazione grafica della parabola di equazione $y=x^2+2x+2$. Rappresentazione grafica della parabola di equazione $y=ax^2+bx+c$ con $a \neq 0$. Vertice di una parabola. Risoluzione dell'equazione $ax^2+bx+c=0$. Risoluzione di equazioni e disequazioni di secondo grado.
- 07/10/13 (2 ore): Risoluzione di disequazioni di secondo grado. Risoluzione di disequazioni razionali fratte. Risoluzione grafica di sistemi di disequazioni di primo e/o secondo grado. Interpretazione geometrica di equazioni e disequazioni di secondo grado. Geometria analitica nel piano (ancora un po'...): distanza tra due punti.
- 09/10/13 (2 ore): Equazione generale della circonferenza. Equazione canonica della circonferenza con centro l'origine (o un altro punto del piano cartesiano) e raggio r . Esercizi vari sull'equazione della circonferenza. Sistemi di disequazioni (in due incognite). Dall'equazione generale della circonferenza all'equazione canonica della circonferenza. Esercizi. Equazione generale dell'ellisse. Equazione canonica dell'ellisse con centro l'origine (o un altro punto del piano cartesiano). Qualche esercizio (dall'equazione generale dell'ellisse all'equazione canonica). Esercizi.
- 10/10/13 (2 ore): Formula risolutiva per le equazioni di secondo grado. Equazione generale dell'iperbole. Equazione canonica dell'iperbole con centro l'origine. Equazione canonica dell'iperbole con centro l'origine (o un altro punto del piano cartesiano). Equazione dell'iperbole equilatera (riferita agli assi coordinate). Esercizi vari sull'ellisse, iperbole, parabola. Sistemi di disequazioni (in due incognite).
- 14/10/13 (2 ore): Ancora un esercizio con iperbole equilatera e circonferenza. Insiemi numerici limitati (limitati inferiormente, limitati superiormente). Massimo e minimo di un insieme numerico. Esempi. Funzioni generiche: definizione di funzione (dominio, codominio, legge). Esempi di funzioni e non (graficamente e non). Uguaglianza di due funzioni.
- 16/10/13 (2 ore): Uguaglianza di due funzioni. Esempi. Grafico di una funzione. Esempi. Immagine di un insieme tramite una funzione. Esempi. Funzione reale. Funzione reale di variabile reale. Grafico di una funzione reale di variabile reale. Ogni sottoinsieme di $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ è grafico di una funzione?
- 17/10/13 (2 ore): Varianti di un grafico: dal grafico di $f(x)$ al grafico di $f(x)+a$, $f(x+a)$, dove a è un numero reale fissato (con i rispettivi domini). Dal grafico di $f(x)$ al grafico di $af(x)$, dove a è un numero reale fissato. Cenno al grafico della funzione $f(ax)$, con a numero reale positivo fissato (con rispettivo dominio). Funzione iniettiva. Esempi. Funzione suriettiva. Esempi. Funzione biiettiva (biunivoca). Esempi. Funzione inversa f^{-1} (da non confondere con la funzione reciproca $1/f(x)$!!).

21/10/13 (2 ore): Grafico di f^{-1} . Rappresentazione di f^{-1} per una funzione f reale di variabile reale. Esempi. Funzione inversa di $f(x)=x^2$. Esercizi sulla funzione inversa (e la sua rappresentazione grafica). Funzioni elementari: funzione costante, lineare, affine, quadratica. Rappresentazione grafica della funzione $f(x)=x^2$ (e di $f(x)=x^4, x^6 \dots$ - funzioni potenze pari!!). La funzione $f(x)=1/x^2$ ($1/x^4, 1/x^6 \dots$) e il suo grafico. Le funzioni radici pari e la loro rappresentazione grafica (non confondere la funzione inversa con la funzione reciproca $1/f(x)!!!!$).

23/10/13 (2 ore): La funzione $f(x)=x$ ($x^3, x^5, x^7 \dots$ - funzioni potenze dispari!!). La funzione $f(x)=1/x$ ($1/x^3, 1/x^5 \dots$) e il suo grafico. Le funzioni radici dispari e loro rappresentazione grafica. Grafici di funzioni. Esercizio su immagine e varianti di un grafico. Restrizione. Composizione di funzioni: definizione ed un esempi. Insiemi di definizione di funzioni composte. Esempi.

24/10/13 (2 ore): Funzione reale di variabile reale: costruzione di nuove funzioni a partire dalle funzioni elementari mediante
A) le operazioni aritmetiche (somma, differenza, prodotto, rapporto di funzioni);
B) la composizione di funzioni;
C) le funzioni inverse;
D) le funzioni definite a tratti.
Esempi.
Funzioni limitate (inferiormente limitate, superiormente limitate). Esempi.
Estremi di una funzione: massimo e/o minimo. Punti di massimo e/o di minimo.
Esempi. Esercizi vari.

Interruzione della attività didattica (28 ottobre – 4 novembre)

31/10/13 (2.30 ore): Prima Prova Intermedia

05/11/13 (2 ore): Insieme simmetrico (rispetto all'origine). Funzioni pari e funzioni dispari. Rappresentazione grafica delle funzioni pari (dispari). Esempi: tutte le funzioni potenze pari sono funzioni pari, e tutte le funzioni potenze dispari sono funzioni dispari. Esempi.
Funzioni monotone (funzioni crescenti, decrescenti, debolmente crescenti, debolmente decrescenti). Esempi: $f(x)=x^2$ è crescente su $[0, +\infty[$; $f(x)=3x+1$ è crescente su \mathbf{R} (dim.); $f(x)=-3x+1$ è decrescente su \mathbf{R} (dim.); $f(x)=1/x$ non è monotona su $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ (dim.). Intervalli di monotonia.
Funzione valore assoluto. Definizione e proprietà fondamentali.

06/11/13 (2 ore): Risoluzione di equazioni e disequazioni con il valore assoluto. Grafici con il valore assoluto. Insieme di definizione di funzioni contenenti il valore assoluto e i loro grafici.

07/11/13 (2 ore) Funzioni potenze. Funzione esponenziale in base a ($a>0, a \neq 1$): proprietà, rappresentazione grafica. Confronto dei grafici con basi diverse. Il numero di Nepero e . Rappresentazione grafica di funzioni contenenti la funzione esponenziale.

Determinazione di insiemi di definizione per funzioni contenenti la funzione esponenziale. Risoluzione di equazioni e disequazioni esponenziali.

Funzione logaritmo in base a ($a > 0$, $a \neq 1$): definizione, proprietà, rappresentazione grafica. Esercizi: calcolo di $\log_a x$ per diverse basi a e diversi punti x .

11/11/13 (2 ore): Proprietà del logaritmo. Determinazione di insiemi di definizione per funzioni con il logaritmo.

Risoluzione di equazioni e disequazioni logaritmiche (utilizzando la monotonia e le proprietà algebriche del logaritmo).

13/11/13 (2 ore): Funzioni continue: funzione continua in $x_0 \in A$ (con ε e δ), funzione continua in A . Esempi: funzione costante e $f(x)=x$ su \mathbf{R} . Esempio di funzione non continua in un punto.

Teorema: se f e g sono funzioni continue in $x_0 \in A$, allora anche $f+g$ ($f-g$), fg , f/g (se $g(x_0) \neq 0$), $|f|$ sono continue in x_0 (continuità in A).

Ulteriori esempi di funzioni continue.

Continuità della funzione composta e della funzione inversa.

Funzioni continue: funzioni polinomiali, funzioni razionali fratte (dove non si annulla il denominatore), funzioni radici, funzioni esponenziali, funzioni logaritmiche.

Funzioni continue su $[a,b]$: Teorema di esistenza degli zeri.

14/11/13 (2 ore): Teorema di esistenza degli zeri. Metodo di bisezione. Esempi ed applicazioni. Teorema di Weierstrass. Esempi e applicazioni del teorema di Weierstrass.

Limiti di funzioni mediante esempio:

- per descrivere il comportamento agli estremi del dominio di una funzione definita su $]a,b[$ (a numero reale oppure $-\infty$; b numero reale oppure $+\infty$): limite destro, limite sinistro;
- per descrivere il comportamento vicino ad un punto c di una funzione definita su $]a,c[\cup]c,b[$; limite destro, limite sinistro;
- per descrivere il comportamento vicino ad un punto $c \in]a,b[$ di una funzione definita su $]a,b[$, ma discontinua in c ; limite destro, limite sinistro.

18/11/13 (2 ore): Alcune definizioni rigose di limite destro. La retta reale estesa: $\mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Limite. Esercizi. Funzioni definite a tratti (continue o con punti di discontinuità). Esercizi.

Unicità del limite. Proprietà algebriche del limite (limite destro, limite sinistro, limite).

19/11/13 (2 ore): Consegna agli studenti della PPI

20/11/13 (2 ore): Forme indeterminate: $\infty-\infty$, $0(\infty)$, ∞/∞ , $0/0$. Esempi. Continuità di funzioni definite a tratti. Limite del logaritmo e del esponenziale agli estremi del loro dominio. Confronto di velocità di crescita ($\log_a x < x^n < a^x$ per x tendente a $+\infty$, con $a > 1$). Esercizi. Limite della funzione composta mediante esercizi (senza enunciato).

Limiti notevoli in 0 per le funzioni $[\log(1+x)]/x$ e $(e^x-1)/x$. Limite di funzioni composte e limiti notevoli. Esercizi. Asintoti: verticali, orizzontali, obliqui.

21/11/13 (2 ore): Asintoti: verticali, orizzontali. Esercizi. Asintoti obliqui. Esercizi.

Introduzione alla derivata. Rapporto incrementale, derivata in un punto.

Interpretazione geometrica della derivata. Equazione della retta tangente al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$ (se f è derivabile in x_0). Funzione derivata. Derivata delle funzioni elementari. Esercizio: eq. retta tangente al grafico di varie funzioni.

25/11/13 (2 ore): Algebra delle derivate. Derivata destra (sinistra) in un punto. Punti di non derivabilità di una funzione: Punti angolosi ($x=0$ per $f(x)=|x|$); punti a tangente verticale ($x=0$ per $f(x)=\text{radice cubica di } x$); cuspidi ($x=0$ per $f(x)=\text{radice cubica di } |x|$). Se f è derivabile in un punto, allora f è continua in quel punto. Non vale il viceversa ($f(x)=|x|$ è continua in $x=0$, ma non derivabile). Algebra delle derivate. Esercizi. Derivata della funzione composta. Esempi. Massimi (minimi) locali (o relativi): lettura del grafico.

27/11/13 (2 ore): Massimi (minimi) locali: Definizione ed esempi. Teorema di Fermat (senza dim.). Punti critici (o stazionari). Teorema di Lagrange; sua interpretazione geometrica e suoi corollari:
Cor. 1: $f' = 0$ su $]a,b[$ implica f costante su $]a,b[$ (con dim.).
Cor. 2 (test di monotonia): segno della derivata e monotonia
(sia f derivabile su $]a,b[$; f debolmente crescente (risp. debolmente decrescente) su $]a,b[$ se e solo se $f' \geq 0$ (risp. $f' \leq 0$) su $]a,b[$;
se $f' > 0$ su $]a,b[$ allora f è crescente su $]a,b[$ (non vale il viceversa);
se $f' < 0$ su $]a,b[$ allora f è decrescente su $]a,b[$ (non vale il viceversa)).
Cor. 3: punti critici e loro natura.
Schema per lo studio qualitativo di una funzione [dominio, segno della funzione, comportamento agli estremi del dominio, derivabilità e derivata, punti critici, segno della derivata (monotonia della funzione), grafico qualitativo della funzione]. Studio qualitativo di $f(x)=2x^3-3x^2$.

28/11/13 (2 ore): Studio qualitativo di $f(x)=xe^{-3x}$. Derivate seconde di una funzione. Esempi. Funzione convessa (concava) su $]a,b[$. Punto di flesso. Segno della derivata seconda e convessità (concavità). Studio qualitativo delle seguenti funzioni: $f(x)=1/(x^2+1)$; $f(x)=x/(x^2-1)$.

02/12/13 (2 ore): Studio qualitativo delle funzioni $f(x)=2x^2/(x+1)$; $f(x)=e^{-(x^2)}$; $f(x)=x^2(\log x - 1)$. Introduzione all'integrazione: Integrale ed area (casi elementari). Simbolo di sommatoria.

04/12/13 (2 ore): Simbolo di sommatoria. Esercizi. Integrale definito per funzioni continue su $[a,b]$. Somma di Cauchy-Riemann. Interpretazione geometrica dell'integrale definito per funzioni non-negative. Esempi facili. Proprietà dell'integrale (linearità; additività rispetto all'intervallo di integrazione; monotonia). Integrale definito per funzioni continue a tratti. Esempi. Funzione primitiva. Varie osservazioni sulle funzioni primitive.

05/12/13 (2 ore): Tabella delle primitive immediate. Altre primitive 'quasi' immediate:
 $\int e^{f(x)} f'(x) dx = e^{f(x)} + c$, $\int f'(x)/f(x) dx = \log|f(x)| + c$, $\int f'(x) (f(x))^n dx = (f(x))^{n+1}/(n+1) + c$.
Teorema di Torricelli. Calcolo di integrali definiti semplici. Calcolo dell'area di regioni piane delimitate da grafici di funzioni continue.

- 09/12/13 (2 ore): Studio della funzione $f(x) = (x^2+1)e^{-x}$. Calcolo dell'area di regioni piane delimitate da grafici di funzioni continue. Funzione integrale. Esercizi. Teorema fondamentale del calcolo integrale (enunciato). Integrale indefinito. Studio della funzione integrale. Esercizi.
- 10/12/13 (2 ore): Funzione integrale (esercizio). Teorema di Torricelli (dim.).
L'integrale generalizzato della funzione gaussiana e^{-x^2} su $]-\infty, +\infty[$ vale $\pi^{1/2}$ (cenno).
Elementi di Calcolo Combinatorio: Permutazioni semplici e con ripetizioni. Disposizioni semplici. Combinazioni semplici. Esercizi.
- 19/12/13 (3 ore): Seconda Prova Intermedia