

COGNOME _____
NOME _____
MATRICOLA | | | | | |

NON SCRIVERE QUI

1	2	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---

B

UNIVERSITÀ DI TRENTO — DIP. DI PSICOLOGIA E SCIENZE COGNITIVE
CDL IN SCIENZE E TECNICHE DI PSICOLOGIA COGNITIVA

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA
A.A. 2013-2014 — ROVERETO, 23 GENNAIO 2014

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **TRE ORE**.

Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.

È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.

Potete usare solo il vostro materiale di scrittura e il vostro materiale di studio. Non usate il colore rosso.

1) i) Scrivete la negazione della seguente proposizione:

$$\mathcal{A} = "\exists x, y \in \mathbb{R} : [(x > y) \text{ e } (|x| < |y|)]".$$

Dite quale delle due proposizioni è vera e quale è falsa.

ii) Siano dati gli insiemi

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{x - 2x^2} \leq 1\} \text{ e } B = \{x \in \mathbb{R} : \frac{x^2 - 3x}{|x| - 1} < 0\}.$$

- Determinate A e B e rappresentateli sulla retta reale. Dite se sono insiemi limitati.
- Determinate $A \cup B$ e dite se è un intervallo.
- Rappresentate graficamente nel piano cartesiano l'insieme $B \times A$.

2) Siano $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ le funzioni definite da

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} + 2 & \text{se } x < -1 \\ x & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ 2x^4 - 1 & \text{se } x > 1 \end{cases} \quad g(x) = (x - k)^2 \text{ se } k < x \leq k + 1 \text{ con } k \in \mathbb{Z}.$$

- Rappresentate graficamente f e g . Dite se f e/o g sono funzioni limitate.
- Determinate l'immagine di f e dite se f è suriettiva. Dite se f è iniettiva.
- Rappresentate graficamente, nel suo dominio, la funzione $x \mapsto -g(x + 1)$.
- Determinate, se esistono, il massimo e il minimo (risp. i punti di massimo/minimo) di g su \mathbb{R} .

3) i) Risolvete in \mathbb{R} le seguenti disequazioni:

$$\log_3(x^2 - 9) + \log_{\frac{1}{3}}(x + 3) \leq 2; \quad 4^{x^2} \cdot 2^{|x^2 - 1|} > 2^{\log_2 4}.$$

ii) Calcolate $\sum_{n=1}^5 f((-1)^n \frac{1}{n})$, dove $f(x) = \begin{cases} 2 - |x| & \text{se } x \leq 0 \\ \log x & \text{se } x > 0. \end{cases}$

4) i) Determinate le costanti b, c e $d \in \mathbb{R}$ tali che la funzione $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - bx + c & \text{se } -1 \leq x < 0 \\ d & \text{se } x = 0 \\ 3e^x & \text{se } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

risulti continua in $x = 0$ e $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h}$.

ii) Rappresentate nel piano cartesiano il grafico di f .

iii) Determinate l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di coordinata $x = 0$ e rappresentatela nello stesso sistema di riferimento della f .

iv) Determinate il massimo e il minimo (risp. i punti di massimo e di minimo) di f .

v) Calcolate $\int_{-1}^1 f(x) dx$.

5) i) Studiate (insieme di definizione, segno, comportamento agli estremi dell'insieme di definizione, continuità, derivabilità, punti critici e monotonia) la funzione definita da

$$f(x) = \frac{x + 1}{x^2 + 2x - 3}.$$

ii) Determinate gli intervalli di convessità/concavità della funzione f tendendo conto che

$$2x^3 + 6x^2 + 30x + 26 = (x + 1)(2x^2 + 4x + 26) \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}$$

e rappresentatela graficamente nel piano cartesiano.

iii) Determinate l'area della regione piana E delimitata dal grafico di f , dalla retta di equazione $y = x + 1$ e dalla retta di equazione $x = 0$.

6) Rappresentate graficamente una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua e derivabile soddisfacenti le seguenti proprietà: f è pari, $f(1) = -2$, $f'(1) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.

COGNOME _____
 NOME _____
 MATRICOLA | | | | | | |

NON SCRIVERE QUI

1	2	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---

C

UNIVERSITÀ DI TRENTO — DIP. DI PSICOLOGIA E SCIENZE COGNITIVE
 CDL IN SCIENZE E TECNICHE DI PSICOLOGIA COGNITIVA

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA
 A.A. 2013-2014 — ROVERETO, 23 GENNAIO 2014

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **TRE ORE**.

Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.

È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.

Potete usare solo il vostro materiale di scrittura e il vostro materiale di studio. Non usate il colore rosso.

- 1) i) Scrivete la negazione della seguente proposizione:

$$\mathcal{A} = " \exists x, y \in \mathbb{R} : [(x > y) \text{ e } (x^2 < y^2)] ".$$

Dite quale delle due proposizioni è vera e quale è falsa.

- ii) Siano dati gli insiemi

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{x - x^2} \leq 1\} \text{ e } B = \{x \in \mathbb{R} : \frac{x^2 - 4x}{|x| - 1} < 0\}.$$

- a) Determinate A e B e rappresentateli sulla retta reale. Dite se sono insiemi limitati.
 b) Determinate $A \cup B$ e dite se è un intervallo.
 c) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano l'insieme $B \times A$.

- 2) Siano $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ le funzioni definite da

$$f(x) = \begin{cases} 2^x + 1 & \text{se } x < 0 \\ 2(x-1)^4 & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & \text{se } x > 2 \end{cases} \quad g(x) = (x-k)^2 \text{ se } k \leq x < k+1 \text{ con } k \in \mathbb{Z}.$$

- i) Rappresentate graficamente f e g . Dite se f e/o g sono funzioni limitate.
 ii) Determinate l'immagine di f e dite se f è suriettiva. Dite se f è iniettiva.
 iii) Rappresentate graficamente, nel suo dominio, la funzione $x \mapsto -g(x+1)$.
 iv) Determinate, se esistono, il massimo e il minimo (risp. i punti di massimo/minimo) di g su \mathbb{R} .

3) i) Risolvete in \mathbb{R} le seguenti disequazioni:

$$\log_2(x^2 - 4) + \log_{\frac{1}{2}}(x + 2) \leq 3; \quad 9^{x^2} \cdot 3^{|x^2 - 1|} < 3^{\log_3 9}.$$

ii) Calcolate $\sum_{n=1}^5 f((-1)^n \frac{1}{n})$, dove $f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{se } x \leq 0 \\ \log x & \text{se } x > 0. \end{cases}$

4) i) Determinate le costanti b, c e $d \in \mathbb{R}$ tali che la funzione $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + bx - c & \text{se } -1 \leq x < 0 \\ d & \text{se } x = 0 \\ -2e^x & \text{se } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

risulti continua in $x = 0$ e $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h}$.

ii) Rappresentate nel piano cartesiano il grafico di f .

iii) Determinate l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di coordinata $x = 0$ e rappresentatela nello stesso sistema di riferimento della f .

iv) Determinate il massimo e il minimo (risp. i punti di massimo e di minimo) di f .

v) Calcolate $\int_{-1}^1 f(x) dx$.

5) i) Studiate (insieme di definizione, segno, comportamento agli estremi dell'insieme di definizione, continuità, derivabilità, punti critici e monotonia) la funzione definita da

$$f(x) = \frac{x - 1}{x^2 - 2x - 3}.$$

ii) Determinate gli intervalli di convessità/concavità della funzione f tendendo conto che

$$2x^3 - 6x^2 + 30x - 26 = (x - 1)(2x^2 - 4x + 26) \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}$$

e rappresentatela graficamente nel piano cartesiano.

iii) Determinate l'area della regione piana E delimitata dal grafico di f , dalla retta di equazione $y = x - 1$ e dalla retta di equazione $x = 0$.

6) Rappresentate graficamente una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua e derivabile soddisfacenti le seguenti proprietà: f è pari, $f(3) = 1$, $f'(3) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2$.