COGNOME ______________	NON SCRIVERE QUI
NOME ______________	C
MATRICOLA ⌊⌊⌊⌊⌊⌊⌋	1 2 3 4 5 6

UNIVERSITÀ DI TRENTO — DIP. DI PSICOLOGIA E SCIENZE COGNITIVE

CDL IN SCIENZE E TECNICHE DI PSICOLOGIA COGNITIVA

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA

A.A. 2013-2014 — ROVERETO, 9 GENNAIO 2014

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **TRE ORE**.
Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.
È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.
Potete usare solo il vostro materiale di scrittura e il vostro materiale di studio. Non usate il colore rosso.

1) Siano dati gli insiemi

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |x^2 + 2x - 1| < 2\} \ \text{ e } \ B = \{x \in \mathbb{R} : \log_3(x^2 - 1) \leq \log_3(|x| + 1)\}\,.$$

i) Determinate A e B e rappresentateli sulla retta reale.
ii) Determinate $A \cup B$ e $A \setminus B$. Dite se A e B sono disgiunti.
iii) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano l'insieme $A \times B$.
iv) Scrivete la negazione della seguente proposizione:

$$\mathcal{P} = \text{"}\forall x \in A\,, \quad [(x > 0) \Longrightarrow (x^2 \geq 1)]\text{"}.$$

Dite quale delle due proposizioni è vera e quale è falsa.

2) Siano $f : [-2, 6] \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ le funzioni definite da

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x+1} & \text{se } -2 \leq x < -1 \\ \log_2(x+2) & \text{se } -1 \leq x \leq 6 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} - 1 & \text{se } x < -1 \\ 2 & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-2} & \text{se } x > 1\,. \end{cases}$$

i) Rappresentate graficamente f e g. Dite se f e/o g sono funzioni limitate.
ii) Determinate l'immagine di f. Rappresentate la funzione inversa $f^{-1} : f([-2, 6]) \to [-2, 6]$ giustificando la sua esistenza.
iii) Rappresentate graficamente, nel suo dominio, la funzione $x \mapsto |g(x)| - 1$.
iv) Calcolate, se esistono, $(f + g)(6)$, $(fg)(-1)$ e $\left(\dfrac{g}{f}\right)(-1)$.
v) Determinate $(f \circ g)(1)$ e $(g \circ f)(2)$.

3) i) Calcolate

$$\int_{-1}^{2} |x^2-1|\,dx\,; \qquad \int_{-3}^{2} \frac{e^{2x}+1}{e^x}\,dx\,; \qquad \lim_{x\to -2^-} \frac{3^{x+2}}{|x|-2}\,.$$

ii) Calcolate $\displaystyle\sum_{j=1}^{5} \text{area}(T_j)$, dove $T_j = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |x|\le 1, 0\le y\le -j|x|+j\}$.

iii) Calcolate $\displaystyle\lim_{b\to+\infty} \Big(\sum_{n=2}^{4}\int_1^b \frac{1}{x^n}\,dx\Big)$.

---

4) Sia $f:[-3,2]\to\mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x)=\begin{cases} 2|x+2| & \text{se } -3\le x\le -1\\ \dfrac{2}{x+2} & \text{se } -1<x\le 0\\ -x^2-\dfrac{1}{2}x+1 & \text{se } 0<x\le 2\,. \end{cases}$$

i) Rappresentate nel piano cartesiano il grafico di f.
ii) Provate che f soddisfa le ipotesi del teorema di Weierstrass su $[-3,2]$.
iii) Determinate il massimo/minimo (risp. punti di massimo/minimo) di f su $[-3,2]$.
iv) Calcolate $\displaystyle\lim_{h\to 0^-}\frac{f(h)-f(0)}{h}$ e $\displaystyle\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h}$. Dite se f è derivabile in $x_0=0$.
v) Calcolate $\displaystyle\int_{-3}^{2} f(x)\,dx$.

---

5) i) Studiate (insieme di definizione, segno, comportamento agli estremi dell'insieme di definizione, continuità, derivabilità, punti critici e monotonia, convessità/concavità) la funzione definita da

$$f(x) = -\log(x^2+2x+2)$$

e rappresentatela graficamente nel piano cartesiano.
ii) Scrivete l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di coordinata $x=0$. Rappresentatela nello stesso sistema di riferimento di f.

---

6) i) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano l'insieme A delle coppie $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ soddisfacenti il seguente sistema di disequazioni

$$\begin{cases} |x|+|y|\le 2\\ 4x^2+8x+4y^2+3>0\\ x<1\,. \end{cases}$$

ii) Determinate l'equazione delle rette orizzontali che non intersecano mai l'insieme A.

Cognome ______________________	Non scrivere qui	D
Nome ______________________		
Matricola $\lfloor\_\!\_\,\rfloor$	1 2 3 4 5 6	

Università di Trento — Dip. di Psicologia e Scienze Cognitive

CdL in Scienze e Tecniche di Psicologia Cognitiva

Esame scritto di Analisi Matematica

A.A. 2013-2014 — Rovereto, 9 Gennaio 2014

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **TRE ORE**.
Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.
È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.
Potete usare solo il vostro materiale di scrittura e il vostro materiale di studio. Non usate il colore rosso.

1) Siano dati gli insiemi

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |x^2 - 2x - 1| < 2\} \text{ e } B = \{x \in \mathbb{R} : \log_3(x^2 - 1) \geq \log_3(|x| + 1)\}.$$

i) Determinate A e B e rappresentateli sulla retta reale.
ii) Determinate $A \cup B$ e $A \setminus B$. Dite se A e B sono disgiunti.
iii) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano l'insieme $A \times B$.
iv) Scrivete la negazione della seguente proposizione:

$$\mathcal{P} = \text{"}\forall x \in A, \quad [(x < 0) \Longrightarrow (x^2 < 1)]\text{"}.$$

Dite quale delle due proposizioni è vera e quale è falsa.

---

2) Siano $f : [-2, 6] \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ le funzioni definite da

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt[3]{x+1} & \text{se } -2 \leq x < -1 \\ \log_{\frac{1}{2}}(x+2) & \text{se } -1 \leq x \leq 6 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} - 1 & \text{se } x < -1 \\ -2 & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-2} & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

i) Rappresentate graficamente f e g. Dite se f e/o g sono funzioni limitate.
ii) Determinate l'immagine di f. Rappresentate la funzione inversa $f^{-1} : f([-2, 6]) \to [-2, 6]$ giustificando la sua esistenza.
iii) Rappresentate graficamente, nel suo dominio, la funzione $x \mapsto |g(x) + 1|$.
iv) Calcolate, se esistono, $(f + g)(6)$, $(fg)(-1)$ e $\left(\dfrac{g}{f}\right)(-1)$.
v) Determinate $(f \circ g)(1)$ e $(g \circ f)(2)$.

3) i) Calcolate

$$\int_0^3 |x^2-1|\,dx\,; \qquad \int_{-1}^2 \frac{e^{3x}+1}{e^x}\,dx\,; \qquad \lim_{x\to -2^+} \frac{3^{x+2}}{|x|-2}\,.$$

ii) Calcolate $\displaystyle\sum_{j=1}^{5} \text{area}(T_j)$, dove $T_j = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |x|\le 1, 0\le y\le -j|x|+j\}$.

iii) Calcolate $\displaystyle\lim_{b\to+\infty} \Big(\sum_{n=2}^{4} \int_2^b \frac{1}{x^n}\,dx\Big)$.

---

4) Sia $f:[-2,3]\to\mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} -x^2+\frac{1}{2}x+1 & \text{se } -2\le x\le 0 \\ -\dfrac{2}{x-2} & \text{se } 0<x\le 1 \\ 2|x-2| & \text{se } 1<x\le 3\,. \end{cases}$$

i) Rappresentate nel piano cartesiano il grafico di f.
ii) Provate che f soddisfa le ipotesi del teorema di Weierstrass su $[-2,3]$.
iii) Determinate il massimo/minimo (risp. punti di massimo/minimo) di f su $[-2,3]$.
iv) Calcolate $\displaystyle\lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)-f(0)}{h}$ e $\displaystyle\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h}$. Dite se f è derivabile in $x_0=0$.
v) Calcolate $\displaystyle\int_{-2}^{3} f(x)\,dx$.

---

5) i) Studiate (insieme di definizione, segno, comportamento agli estremi dell'insieme di definizione, continuità, derivabilità, punti critici e monotonia, convessità/concavità) la funzione definita da

$$f(x) = -\log(x^2-2x+2)$$

e rappresentatela graficamente nel piano cartesiano.
ii) Scrivete l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di coordinata $x=0$. Rappresentatela nello stesso sistema di riferimento di f.

---

6) i) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano l'insieme A delle coppie $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ soddisfacenti il seguente sistema di disequazioni

$$\begin{cases} |x|+|y|\le 3 \\ 4x^2-8x+4y^2+3>0 \\ x>-1\,. \end{cases}$$

ii) Determinate l'equazione delle rette verticali che non intersecano mai l'insieme A.
